Mathématiques
« Penser/Traduire »

Sommaire

Cours 1 et 2 : L'origine des nombres **3**

a. Numérations figurées 3

b. Numérations écrites 4

c. Numérations parlées 8

Cours 3 : Penser/Traduire, opérer sur les nombres **8**

a. Technique de multiplication de l'Egypte antique 8

b. La méthode per gelosia 9

c. La méthode per schahieri et échiquier 10

d. La multiplication digitale 11

Cours 4 : Les numérations écrites **11**

Introduction **11**

I. La numération au Moyen Orient : Mésopotamie, Sumer, Elam, Akkad, Babylone 12

a. Elam : Suse II (3800-3100 av JC) 12

b. Vers une numération babylonienne 12

c. Fonctionnement de la numération babylonienne (multiplication, inverse, division) 13

II. Les égyptiens 16

a. Calculs et fractions en Egypte (Papyrus de Rhind (1550 av JC)) 16

b. Les fractions et la multiplications 16

c. La division 17

III. Les romains 18

a. La numération romaine 19

b. Calculs romains 19

IV. Numération moderne 20

a. Naissance de la numération moderne 20

b. Naissance de l'algorisme et son exportation 20

c. Adoption en Europe et Occident du système de numération arabe 21

Cours 5 : Les différents types de calculateurs **21**

I. Le boulier chinois 21

II. Le boulier japonais 24

III. La pascaline 25

IV. Le bâton de Napier 29

V. L'arithmomètre d'Odhner 30

Cours 6 : L'arithmétique **32**

I. Définitions 32
II. Multiples et diviseurs de naturels 32
III. Plus grand diviseur commun (PGCD) 33
IV. Nombres premiers entre eux 34
V. Plus petit multiple commun (PPCM) 35

Programme : QCM le 24 et Devoir le 15

- Début de la numération
- Les opérations
- Arithmétique
- Introduction à la cryptographie : les codes secrets

Cours 1 : L'origine des nombres

➔ Qu'est-ce qu'un nombre ?

Les **chiffres** sont les signes, des traces écrites utilisés pour écrire les nombres. Dans notre système de numération, il existe dix chiffres (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) qui permettent d'écrire tous les nombres. Les chiffres ont une fonction cardinale (comptage) et ordinale (dénomination, « le troisième »).

Un **nombre** sert à indiquer une quantité ou une position. Un nombre c'est un élément d'un ensemble de nombres (N, Z, Q, R, C…). Chaque nombre est le représentant d'une famille qui contient toutes les collections que l'on peut mettre en correspondance terme à terme.

C'est un **concept** que l'on peut seulement appréhender à travers une ou plusieurs de ses représentations. Pour pouvoir distinguer un nombre d'une de ses représentations il faut disposer de plusieurs **représentations** de ce nombre. Comprendre le concept de nombre c'est disposer de plusieurs représentations des nombres dans des **registres** différentes et **savoir passer de l'une à l'autre** : ce n'est pas spontané.

La **numération** est le système de représentation des nombres. Les numérations peuvent être figurés, écrites, parlées.

Un registre **analogique** utilise une numération figurée (des traits, des points). Un registre **symbolique** utilise une numération **écrite** (42). Un registre **verbal** utilise une numération **parlée** (« quarante-deux » dit ou écrit « quatre dizaines et deux unités ».

a. Numérations figurées

Chaque nombre est représenté par un objet **naturel ou fabriqué**.
En Perse au IVème siècle av. J.C. on utilise une technique à partir de **nœuds disposés le long d'une cordelette.** Les mésopotamiens mettent eux au point **des calculi**, jetons d'argile aux formes diverses, chacune correspondant à une valeur (cône, sphère, billes…)

Ces numérations sont faibles car elles ne peuvent pas garder de trace du calcul, **chaque étape supprimant la précédente.**

Dès la préhistoire, l'homme a utilisé des connaissances **pré-numériques** pour se souvenir d'une quantité : la correspondance terme-à-terme lui permet de conserver le cardinal d'une collection à l'aide d'une collection équipotente (entailles sur un os). Une autre fonction possible a été décelée : se repérer dans le temps (utilisation d'un « calendrier »). Par exemple, le nombre de jours entre deux phases lunaires a été identifié (le nombre étant encore repéré par une collection équipotente.

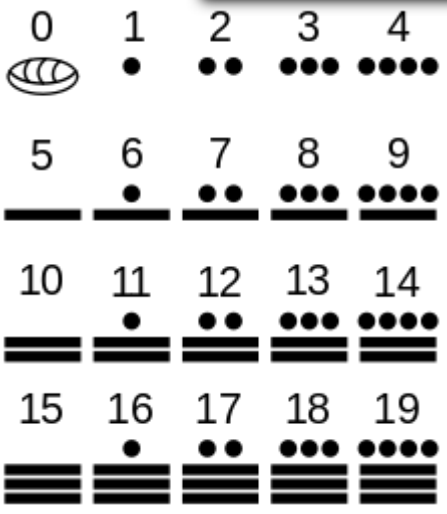
b. Numérations écrites

Chaque nombre est représenté par des signes, appelés chiffres. La première numération écrite est sumérienne. Les bulles utilisées pour y glisser les calculi se transforment en **tablettes d'argile**, sur lesquelles les mésopotamiens tracent des **signes numériques** avec une pointe de roseau.

On trouve un système de numération par catégorie de ce qui est compté. Si on compte le blé, un symbole est choisi. Ci-dessous, numération égyptienne, romain, sino japonaise et maya.

Chiffres arabes	Chiffres hiéroglyphes	Description du signe
1		Un bâton
10		Un fer à cheval à l'envers
100		Un rouleau de papyrus
1000		Une fleur de Kha (ou fleur de lotus)
10 000		Un doigt qui montre les étoiles dans le ciel
100 000		Un têtard, car il y en a beaucoup sur les bords du Nil
1 000 000 ou Infini		Dieu agenouillé soutenant le ciel en entier. Signifie aussi « millions d'années ou éternité »

0	零	ling
1	一	i
2	二	Erh
3	三	San
4	四	Ssu
5	五	Wu
6	六	Liu
7	七	Chhi
8	八	Pa
9	九	Chiu
10	十	Shih
100	百	Pai
1000	千	Chhien
10000	万	wan



↓ Numération Maya →

Avec trois niveaux de lecture en verticale

Troisième niveau : x7200
Deuxième niveau : x360
Premier niveau : x20
Niveau initial : x1

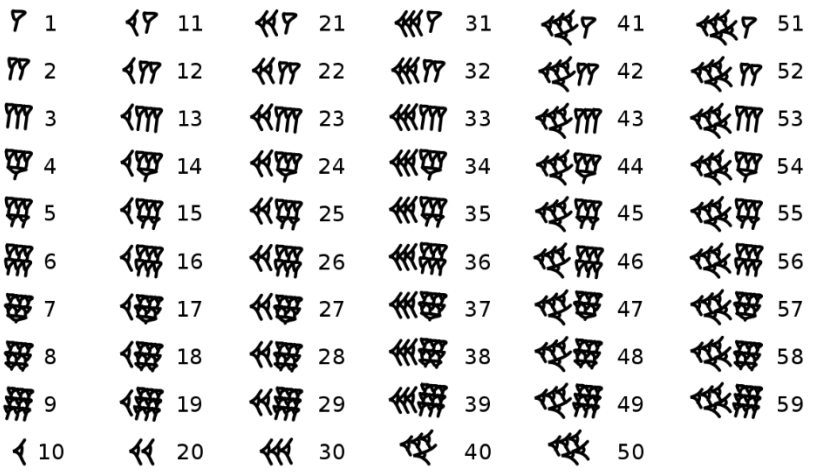
Niveaux/Nombres	1	100	720
X7200			
X360			••
X20		_	
X1	•		

	Nbre signes	Zéro	Rôle position	Type de groupements	Opérations implicites	Base
Système usuel (écrit)	10	Présent, absence de chiffres, quantité 0	Présent, signale absence de chiffres	RAS (chaque chiffre est représenté par un seul symbole : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)	Multiplications, additions	10
Egyptiens	1/unité (7 jusqu'à 1 million)	Absent	Aucun	Par unité, Ordre décroissant (pas nécessaire)	Additions	10
Romains	7 jusqu'à mille (1 par « unité ») IVXLCDM	Absent	Avant/après : soustraction/addition	Par unités, pas plus de 3 (sauf M :4)	Addition/soustraction	5,10
Sino-japonais	1/ unité+ 7 pour les chiffres (le même pour 1,2,3)	Absent	Le chiffre doit précéder son unité (mais les unités les peuvent être dans le désordre)	Chiffre avec unité. Ordre décroissant (pas nécessaire)	Multiplication, additions	10
Maya	3 (0,1,5)	Présent, signale absence de chiffres	La position détermine la valeur du chiffres	Par unité (les 5 en bas, les 1 en haut)	Multiplications, additions	20, 18 (dates), 5 pour les chiffres
Babyloniens	2 (1,10) apparition du zéro 300 av JC	Absent, introduit -300 av JC (vide=0)	La position détermine la valeur du chiffre	Par unité (d'abord les chevrons, puis les clous)	Addition, multiplications (puissance de 60)	60, 10 pour les chiffres

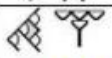
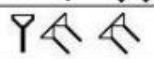
Cours 2 : L'origine des nombres (PARTIE II)

b. Numérations écrites (suite)

La **numération babylonienne** se caractérise par le fait que la position détermine la valeur.



Voici les signes jusqu'à 50. La numération babylonienne est en base 60 c'est-à-dire qu'elle contient des signes jusqu'à 60. A partir de soixante, le signe revient à 1 et on rajoute zéro à côté tel que 1*60+0*1=60 (voir tableau ci-dessous)

Valeur décimale	Écriture babylonienne cunéiforme	Décomposition en base 60
1		1×1
15		15×1
44		44×1
60		$60 = 1 \times 60 + 0 \times 1$
85		$85 = 1 \times 60 + 25 \times 1$
3 600		$3\,600 = 1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 0 \times 1$
4 923		$4\,923 = 1 \times 60^2 + 22 \times 60 + 3 \times 1$

L'écriture fonctionne ensuite avec des carrés.

La **numération Shadock** ne comporte que 4 signes. Pour passer à 4, on fait BU GA soit −O puis 5, −− puis 6, − ⌙ ….etc.

O (GA)	0
− (BU)	1
⌙ (ZO)	2
◿ (MEU)	3

Pour convertir du Shadok au Décimal, il nous faut tout d'abord convertir le mot Shadok en base 4.
Pour cela, on stocke les chiffres correspondants aux symboles Shadok dans un tableau.
Enfin, on multiplie chaque chiffre par 4^i, avec i son rang. On fait la somme totale et on obtient le nombre décimal.

Prenons comme exemple le mot MEUMEUGABUZO :

MEUMEUGABUZO	On remplace.
33012	On multiplie par la puissance du rang : **3***4^4 + **3***4^3 + **0***4^2 + **1***4^1 + **2***4^0 = 768+192+0+4+2 = 966.
966	MEUMEUGABUZO en Shadok est donc égal à 966 en base décimale.

Pour convertir du Décimal au Shadok, **il nous faut tout d'abord convertir le nombre en base 4.**
Pour cela**, on stocke les restes de l'algorithme d'Euclide sur le nombre décimal, par 4. On inverse ensuite ce tableau.**
Enfin, on remplace chaque chiffre par sa valeur en Shadok : 0 -> GA, 1 -> BU, 2 -> ZO, 3 -> MEU.

Prenons comme exemple le nombre 27 :

27	27/4=6 Reste **3**➔6/4=1 Reste **2**➔1/4=0 Reste **1. Donc 321**
321	On inverse.
123	On remplace maintenant chaque chiffre par sa représentation Shadok.
BUZOMEU	27 en base décimale est donc égal à BUZOMEU en Shadok.

La **numération moderne en base B** est notre numération que l'on utilise tous les jours.

Les numérations modernes en bas $b \geqslant 2$ ont les caractéristiques suivantes :

- Un ensemble de chiffres E. Par exemple E= {0,1,2,3} en base b=4 ou E={0,1,2,3,…,9,A,B} en base b=12. Plus b est élevé, plus il faut inventer des désignations pour les chiffres.
- L'existence du 0 signalant l'absence de chiffres dans une unité
- Une règle d'échange fixe : on échange b unités contre une unité supérieur.
- La valeur d'un chiffre dépend de sa position (le chiffre donne le nombre d'unité correspondant à sa position)

Notation : l'écriture $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_b$ où les a_i sont les chiffres appartenant donc à l'ensemble E désigne le nombre :

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_b = \sum_{k=0}^{n} a_k b^k = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

(remarquons que $b^0 = 1$).

Insistons sur le fait que jamais un chiffre ne puisse être supérieur ou égal à la base b.

Méthode 1 : Pour un nombre N donné, on regarde la puissance la plus élevée de b inférieure ou égale à N. Soit n cette puissance (on a donc $b^n \leq N$ et $b^{n+1} > N$). On regarde combien de fois b^n rentre dans N, et on calcule le reste : $N = a_n b^n + r$ (c'est donc une division euclidienne de N par b^n). Il est clair (pourquoi ?) que $r = N - a_n b^n < b^n$ et on recommence la procédure.

Ce sera plus clair sur un exemple : on veut traduire le nombre $N = 72 = (72)_{10}$ en base 7. La puissance la plus élevée de 7 inférieure ou égale à 72 est $7^2 = 49$ ($7^3 = 343 > 72$). Le 49 rentre une fois dans 72, et il reste $72 - 7^2 = 23$. Ce nombre est strictement inférieur à 49. On recommence. La plus grande puissance de 7 inférieure ou égale à 23 est $7^1 = 7$. Et $23 = 3 \times 7^1 + 2$. Finalement $2 < 7$ et il reste donc 2 unités. On obtient :

$$72 = (72)_{10} = (132)_7.$$

Méthode 2 : Cette méthode consiste a effectuer des divisions euclidiennes successives du nombre N et des quotients obtenus à chaque étape par b jusqu'à ce qu'on obtienne un quotient nul. On prend alors tous les restes dans l'ordre inverse pour obtenir les chiffres cherchés en base b... ouh, ça a l'aire très mystérieux.

Exemple : reprenons notre nombre $N = 72 = (72)_{10}$. Effectuons successivement les divisions euclidiennes :

$$72 = 10 \times 7 + 2, \quad q_1 = 10, \ r_1 = 2,$$

divisons ensuite le premier quotient q_1 par 7 :

$$10 = 1 \times 7 + 3, \quad q_2 = 1, \ r_2 = 3,$$

division ensuite le deuxième quotient q_2 par 7 :

$$1 = 0 \times 7 + 1, \quad q_3 = 0, \ r_3 = 1.$$

Les restes dans l'ordre : 2,3,1 ce qui donne en inversant $(132)_7$, magique! (tout cela s'explique évidemment).

c. Numérations parlées

Les nombres maohi sont un exemple de numération parlée (ici le polynésien moderne)

hō'ē : un piti : deux toru : trois maha : quatre pae : cinq ono : six
hitu : sept va'u : huit iva : neuf 'ahuru : dix 'ahuru ma piti : onze
E piti ahuru : vingt hānere : cent tauatini : mille mirioni : million

La particule numérale « e » se place avant tous les nombres sauf Ho'ê et Aore (zéro) car « e » signifie « c'est » dans les prédicats numéraux.

C'est une numération orale en base 20 régulière et positionnelle. Contrairement à chez nous il y a beaucoup moins d'irrégularité.

Cours 3 : Penser/traduire, opérer sur les nombres

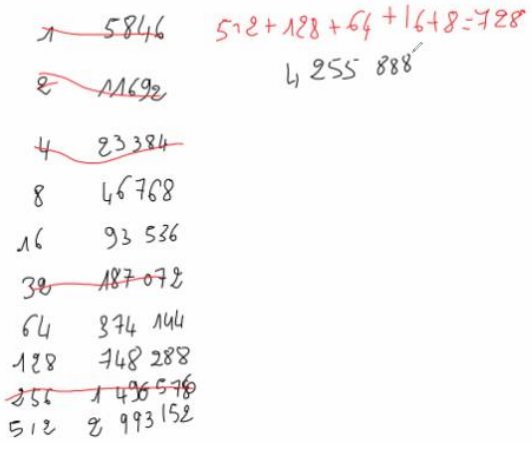
a. Technique de multiplication de l'Egypte antique

1	76
~~2~~	~~152~~
4	304
~~8~~	~~608~~
16	1216
32	2432
53	4028

76x53 = 4028

Si on fait 76*53, on va multiplier successivement 76 par deux jusqu'à avoir au niveau des facteurs additionnés le chiffre 53. On additionne les résultats et on ne tient pas compte des facteurs en trop et on obtient le résultat.

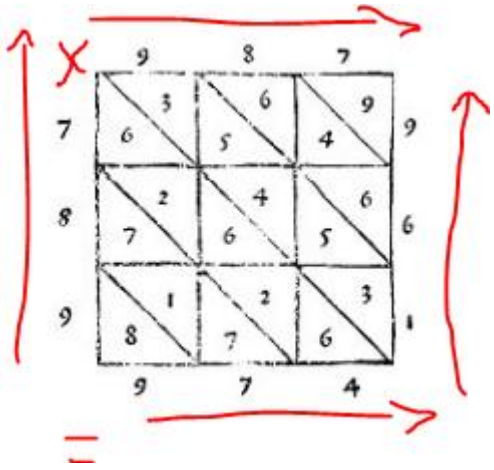
Tel qu'on fait 32+16+4+1= 53, on raye 2 et 8 qui sont en trop et on additionne 76+304+1216+1432 pour obtenir 4028. La méthode à l'égyptienne nécessite de savoir multiplier et additionner pour trouver le résultat tout en tâtonnant au niveau des facteurs.



Voici un autre exemple avec 5846 par 728 ➔

b. La méthode per gelosia

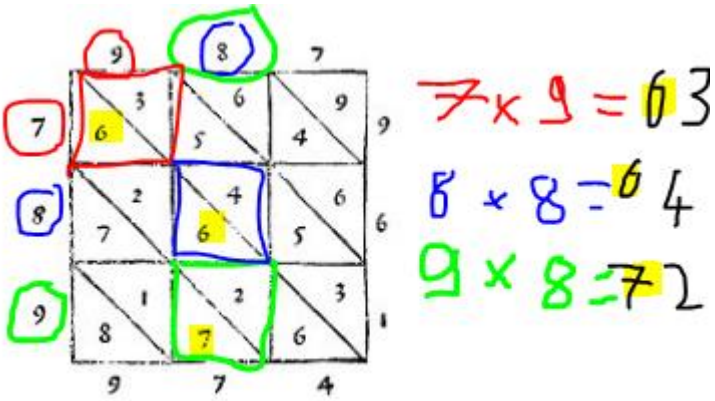
On forme un carré ou un rectangle en forme de tableau avec comme sens de lecture :



Avec pour le calcul ici 987*987 qui donne 974 169

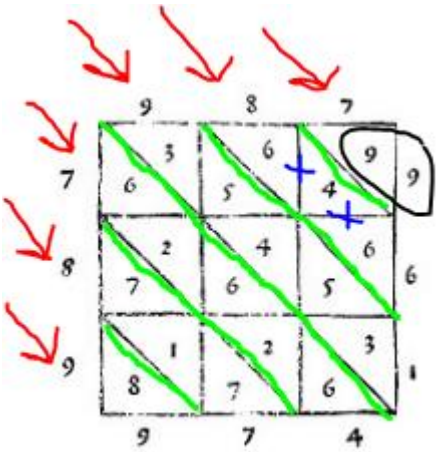
Comment procéder avec cette méthode ?

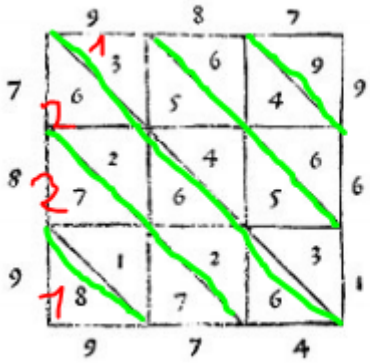
On va multiplier chaque chiffre de notre chiffre à multiplier par chaque chiffre du multipliant et renseigner le résultat dans la case du tableau correspondante avec le chiffre des dizaines en bas et des unités en haut :

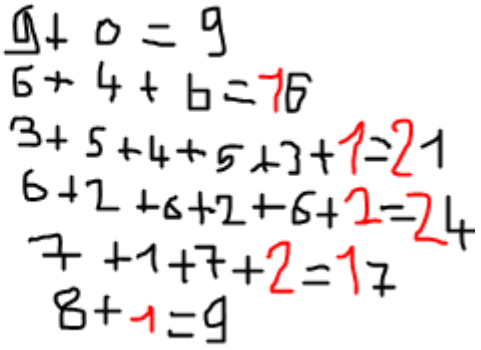


Ainsi on voit que chaque résultat est renseigné dans la case qui lui correspond.

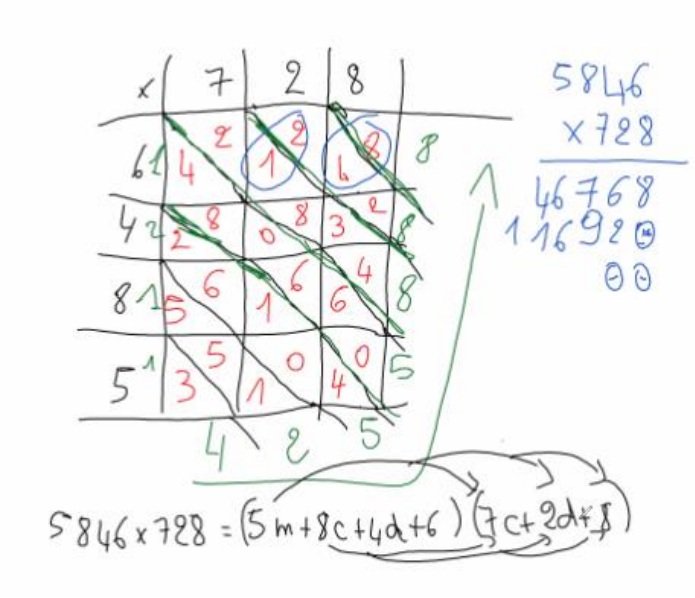
Comment maintenant calculer le résultat ? On va aborder cette méthode avec le sens de lecture représenté ci-dessous et additionner les chiffres avec un système de retenue







Et on trouve bien 961 479.



Un autre exemple avec 5846 par 728. La méthode per Gelosia correspond simplement à un système de double distributivité. En décomposant la multiplication, on additionne les chiffres du même rang. Dans la méthode classique on décale les chiffres pour les faire rentrer dans le même rang.

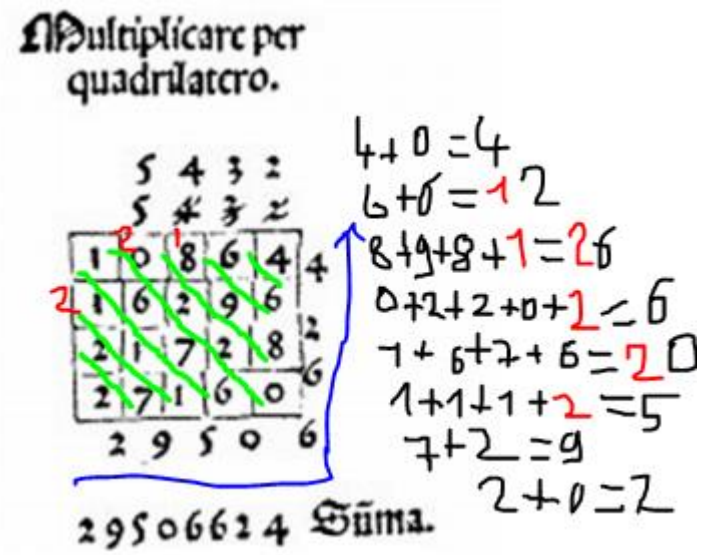
c. Méthode per schahieri et échiquier

			4	6	0	8
				3	6	9
		4	1	4	7	2
	2	7	6	5	8	
1	3	8	2	4		
1	**7**	**0**	**0**	**3**	**5**	**2**

La méthode par échiquier est un mélange entre gelosia et schahieri. Dans le cas de 5432 multiplié par lui-même on va d'abord faire 2*2, 2*3, 2*4, 2*5 puis passer à la ligne d'en dessous pour calculer avec 3 et etc… Ensuite pour avoir le résultat on utilise aussi des diagonales et on additionne de la même manière pour lire le résultat ensuite dans le sens de la flèche bleue. ➔

C'est la méthode qui se rapproche le plus de la notre puisqu'elle prends en compte les retenues mais ne met pas nos zéros : la méthode décale sans zéro les rangs.

➔



d. La multiplication digitale

En regardant simultanément les paumes des mains et en plaçant les doigts de même nom en vis à vis, on les numérote de 6 à 10 en partant du petit doigt.

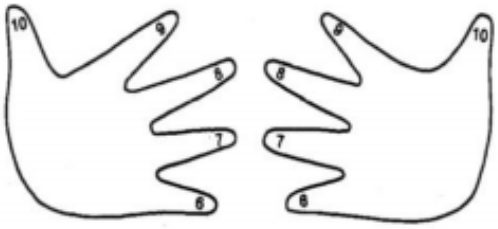
Les extrémités des doigts se touchant presque, on place en contact les deux doigts correspondant aux nombres à multiplier.

• Les doigts libres en « haut », en les multipliant, donnent les unités du résultat.

• Le nombre de doigts en « bas », y compris ceux en contact, donne les dizaines du résultat.

Vérifier que cette méthode s'applique aux calculs

$7x7 = 49$ et $8x7 = 56$.



Pour **8** fois 7, je plie mes doigts jusqu'à **8** pour la main **gauche** j'ai donc 2 doigts de libre et 3 pliés.
Pour la main droite, je plie mes doigts jusqu'à 7, j'ai donc 3 doigts de libres et 2 pliés.

J'additionne mes doigts libres, c'est le chiffre des dizaines.
Je multiplie mes doigts pliés, c'est le chiffre des unités.

Tel que : (3+2)x10 + 3x2= 56

Cours 4 : Les numérations écrites

Introduction :

Chaque **nombre** est représenté par des **signes** appelés **chiffres**. La première numération écrite est sumérienne. Les bulles utilisées pour y glisser les calculi se transforment en tablettes d'argile, que lesquelles les mésopotamiens tracent des signes numériques avec une pointe de roseau.

L'adoption d'une **base** est le moyen que les numérations se donnent pour n'utiliser qu'un petit nombre de mots (numérations parlées) ou de symboles (numérations écrites) dans la représentation des nombres.

C'est ce qui leur permet de ne pas être de purs dénombrements où chaque nombre est une somme de un.

Selon Geneviève et Georges IFRAH, il existe des numérations :

- Additives
- Hybrides
- Et de Position

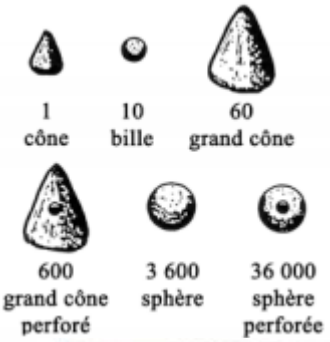
Selon Denis Guedj : « Ce qui pour nous est une évidence, effectuer directement les opérations avec l'écriture des nombres se révèle une pratique tardive et exceptionnelle dans l'histoire des Hommes »

I. La numération au Moyen Orient : Mésopotamie, Sumer, Elam, Akkad, Babylone

Communément on situe la rupture entre la préhistoire et l'antiquité au moment de l'apparition des écritures. Les premières écritures apparaissent au Moyen Orient vers 3500 av. JC dans le contexte marchand. La tablette de Dispilio serait datée d'environ 5200 av JC (trouvée au fond du lac asséché de Kastoria en Grèce).

Voici un tableau récapitulatif de la numération au Moyen-Orient :

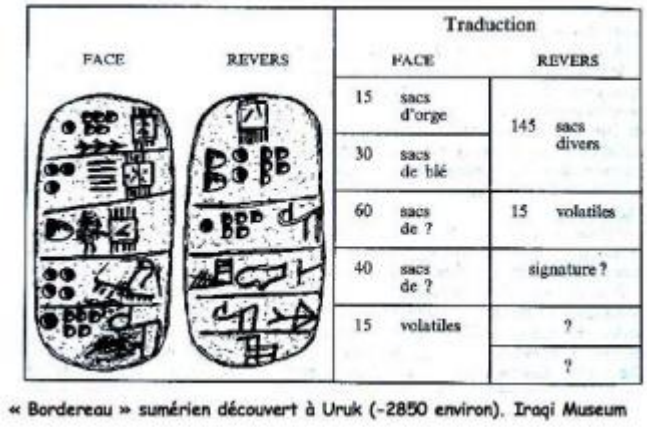
Années	Période	Société	Mathématiques
3700-2000	**Sumer** : Uruk finale, archaïque, akkadienne, Ur	Cités-états, puis état unifié, planification du travail et unification de la métrologie	Comptabilité, textes scolaires, cadastres, calculs de surfaces, apparition de la **numération sexagésimale positionnelle**
2000-1600	Paléo-babylonienne	Unification linguistique autour de l'akkadien. Le sumérien reste langue scolaire et d'érudition	**Tables métrologiques, numériques**, exercices de calculs, listes **d'étoiles.**
900-150	**Néo-babylonienne**	Existence de bibliothèques et d'observatoire.	Traités d'observations **astronomiques**, textes médicaux.
550-100	Achéménide, Séleucide	Bibliothèques (Uruk, Babylone)	Astronomie, calcul.



a. Elam : Suse II (3800-3100 av JC)

Elam correspond à la Mésopotamie (actuel Iran Ouest)

Pour commercer ou tenir compte, on utilisait des bulles d'argiles scellées dans lesquels on renferme des cailloux (*calculi*) avec une représentation en base 10 et 60. Ces bulles-enveloppes à calculi enferment le nombre correspondant par exemple aux marchandises. L'acheteur peut ensuite la briser pour vérifier.

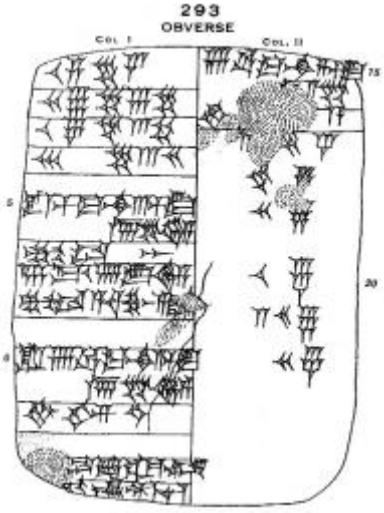


« Bordereau » sumérien découvert à Uruk (-2850 environ). Iraqi Museum

Ces bulles-enveloppes évoluent ensuite (3300 av JC) vers des tablettes en argile représentant la marchandise. La numération sumérienne vers 3300 av JC correspond à une numération additive en base 10 et 60.

b. Vers la numération babylonienne

L'écriture cunéiforme apparaît vers 3400-3100 av JC et des traces sont retrouvées sous forme de gravure sur agile séché. Les premières tablettes mathématiques sont retrouvées vers 2300 av JC (période d'Akkad) mais la majorité des traces mathématiques datent



du paléobabylonien (2000-1800 av JC) avec des textes scolaires, savants et des calculs numériques.

Les premières traces de numération cunéiforme se trouvent dans des tablettes administratives, des listes ou des contrats commerciaux.

Cete tablette montre l'usage d'une notation positionnelle datée de la période d'Ur III (2100-2000 av JC)

c. Fonctionnement de la numération babylonienne

Il existe deux symboles :
Le clou de valeur 1 et le chevron de valeur 10

10 clous font un chevron et 6 chevrons font un grand clou tel que 62 s'écrit de cette manière :

C'est une numération **à** **position**, la valeur du chiffre dépend de sa position. Dans l'excemple cité précedemment, le clou le plus à gauche vaut 60 c'est-à-dire **une** soixaintaine et chacun des clous à droite vaut **une unité**. C'est une numération en base 60. Quand on change de rang, on passe à 60 puis 3600…etc. Les **dix** sont toujours devant les 1 dans un même position.

Le zéro est représenté par l'espace entre deux caractères et représente l'absence d'un chiffre. On introduit les colonnes qui clarifient les espaces. Le zéro apparaît chez les babyloniens au 3ème siècle av JC ←

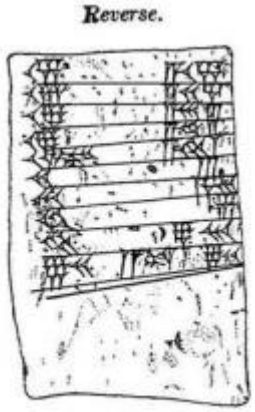
Le système de numération babylonien est en fait une **numération à position relative** : une écriture peut signifier deux choses à la fois. Par exemple : peut signifier 70 comme 4200

1*60 + 1*10= 70 ou alors 60*3600+10*60+1*0 (espace)=4200.

Avec l'exemple vu précedemment, nous voyons que c'est une **numération multicplicative et additive**.

Beaucoup de tablettes trouvées montrent des tables de multiplication, d'inverses, mais aussi de carrés et de racines carrées.

A) La multiplication



Exemple d'une tablette représentant la table de multiplication de 9. L'absence de calculs intermédiaire dans les multiplications a été remarquée souvent et c'est le principal argument qui a conduit certains auteurs à faire l'hypothèse de l'existence d'un instrument de calcul matériel.

La numération babylonienne est à position **relative**.

Le produit de par s'écrit . Traduit dans notre langage, cela correspondrait à « 2 x 30 = 1 ».

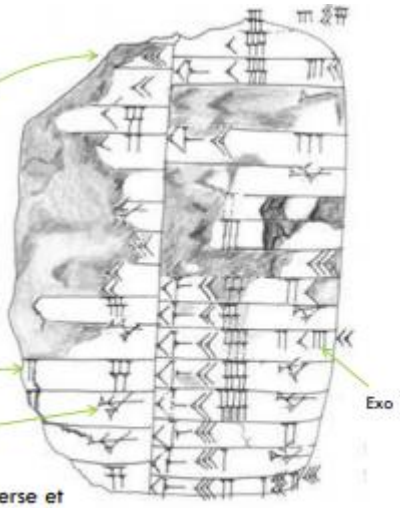
Cette égalité *a priori* absurde devient correcte si l'on interprète le signe « = » comme une relation d'équivalence : « *a=b si on trouve un entier relatif n tel que a=b x 60^n* ». En effet 2 x 30 = 60 = 1 x 60^1.

🡐 Le produit de deux clous par 3 chevrons s'écrit un clou (60). Dans notre langage cela reviendrait à écrire 2*30=1. Il suffit de transformer le signe égal comme une relation d'équivalence tel que a=b si on trouve un entier relatif n tel que a=b*60^n » tel que 2*30=1*60^1.

B) Les inverses

Ci-contre la tablette Ist Ni 374
Dans la colonne de gauche on voit les inverses successifs :

Nombre (invisible)	Inverse
2	30
3	20
4	15
5	12
...	...
12	5
13	nu



Le terme « *nu* » signifie l'absence d'inverse et correspond au symbole :

Pour les babyloniens, une **paire d'inverses** est un couple de nombre (a,b) tel que a*b=60^n pour un entier relatif n convenable , par exemple (2;30). On dira qu'un nombre a est **l'inverse** d'un nombre b si a et b forment une **paire d'inverse**. Par exemple le nombre 15 est l'inverse de 4 tel que 15*4=60^1. Le nombre 450 est l'inverse de 8 tel que 450*8=3600=60^2. L'inverse dans ce sens (selon la relation R)-s'il existe- est aussi unique. Certains nombres n'ont pas d'inverse : 7,11,98…

Un nombre a possède un inverse selon la définition ci-dessus si et seulement si a est produit de puissances de 2,3 et 5.

Un nombre est dit régulier en base 60 s'il possède un inverse (en base 60). Il existe des tablettes d'inverses (voir ci-dessus).

C) Les divisions

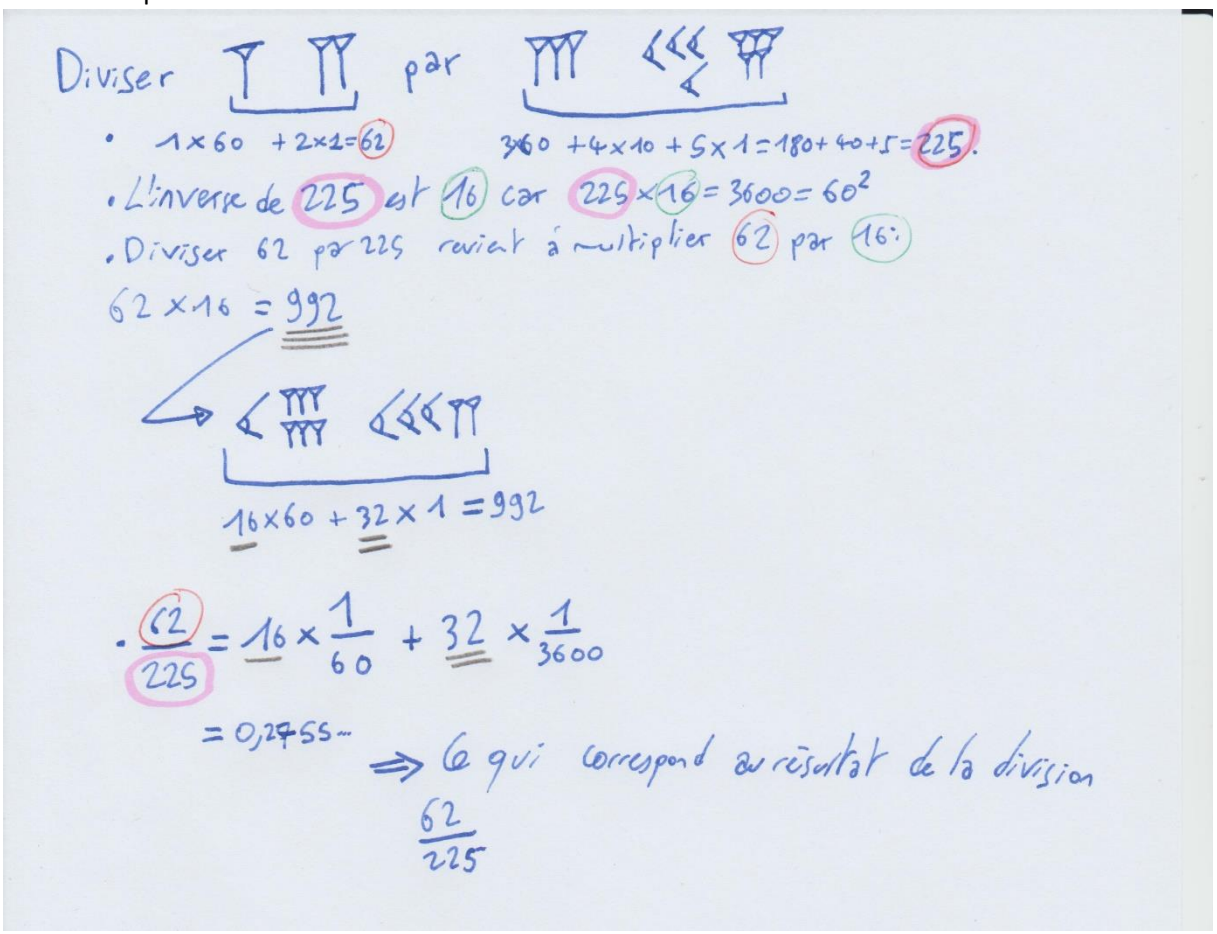
A quoi servaient les inverses ? Les inverses servaient aux divisions. **Diviser un nombre D par un diviseur d revient à multiplier D par l'inverse de d**.

Diviser 192 par 400 revient à multiplier 192 par 9 (car 400*9=60^2=3600). On a donc 192*9=1728 . La première partie du terme qui correspond à 28 et l'autre qui correspond à 48 vont nous servir pour le calcul puisque

$$\frac{192}{400} = 0{,}48 = 28 \times \frac{1}{60} + 48 \times \frac{1}{3600}$$

Avec cette méthode, certaines divisions ne sont pas possibles (si le diviseur n'a pas d'inverse), on obtiendrait des nombres « irsexagésimaux » (irrationnels sexagésimaux)

Autre exemple :



D) Multiplications et carrés vers 1000 av JC

A partir des tables des carrés, on peut aussi effecter des multiplications :

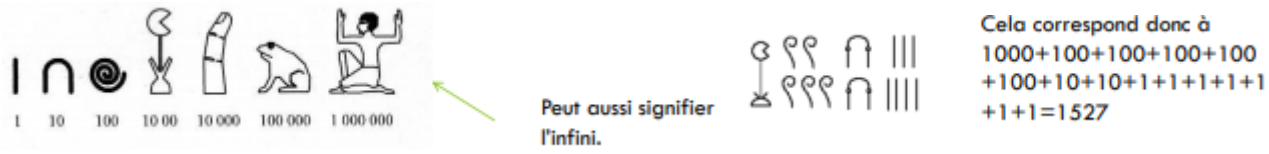
Rappels :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, d'où, par différence : $a \times b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

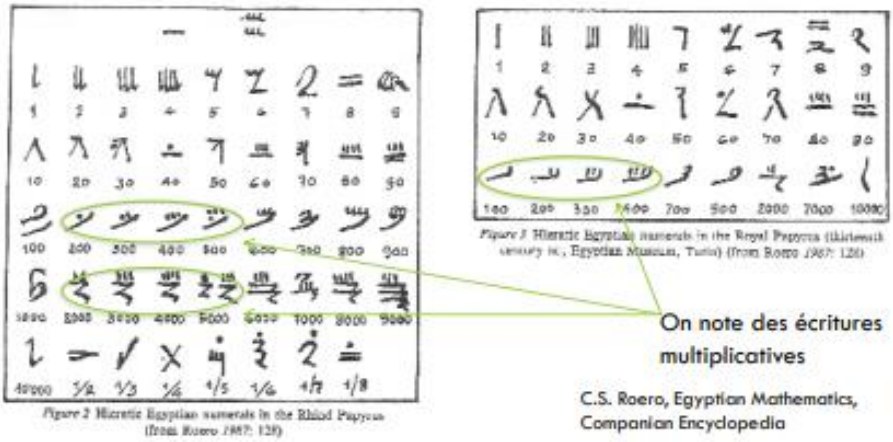
On peut aussi décomposer en carrés pour calculer des multiplications

II. Les egyptiens

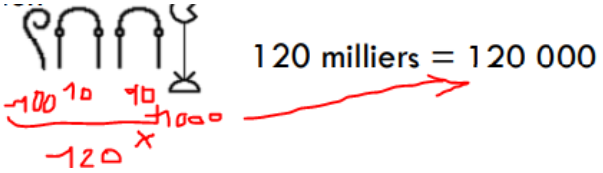
La numération égyptienne date de la fin du quatrième millénaire av JC. La numération est initialement additive et utilise des symboles (signes hiéroglyphes). Un exemple ci-dessous :



C'est une numération en base 10. Il n'y a pas de 0.



Elle évolue d'une écriture **hiéroglyphique** vers l'écriture **hiératique** (simplification des hiéroglypes pour que les scribes écrivent plus rapidemment) vers l'écriture **démotique** (simplification de l'hiératique, écriture **cursive**) (exemple du papyrus de Rhind. Entre 2000 et 1600 avant JC, l'écriture se modifie et l'on trouve des exemples de systèmes de numération à la fois multiplicatif et additif. Cette combinaison permet de combler des problématiques d'espace et esthétiques. Le sens de la lecture ou le contexte permettaient de décider l'interprétation correcte. Un exemple ci-dessous :



a. Calcul et fractions en Egypte (Papyrus de Rhind (1550 av JC))

Il est élaboré par un scribe égyptien (Ahmès ou Ahmose) et découvert à Thèbes en Haute Egypte. Ahmès note que c'est une copie contenant des résultats plus anciens remontant à la période 1985-1796 av JC (XIIème dynastie). Le papyrus est composé de 87 problèmes portant sur les quatre opérations fondamentales de l'arithmétique, le calcul des volumes et la résolution d'équations. Il est acheté en 1858 par Alexander Henry Rhind (égyptologue et juriste écossais).

b. Les fractions et les multiplications

Les **fractions égyptiennes** sont des fractions dont le numérateur est égal à 1 (exceptions pour 2/3). En effet dans la première partie du papyrus, il donne les décompositions en fractions égyptiennes des nombres 2/n pour n impair $5 \leq n \leq 101$.

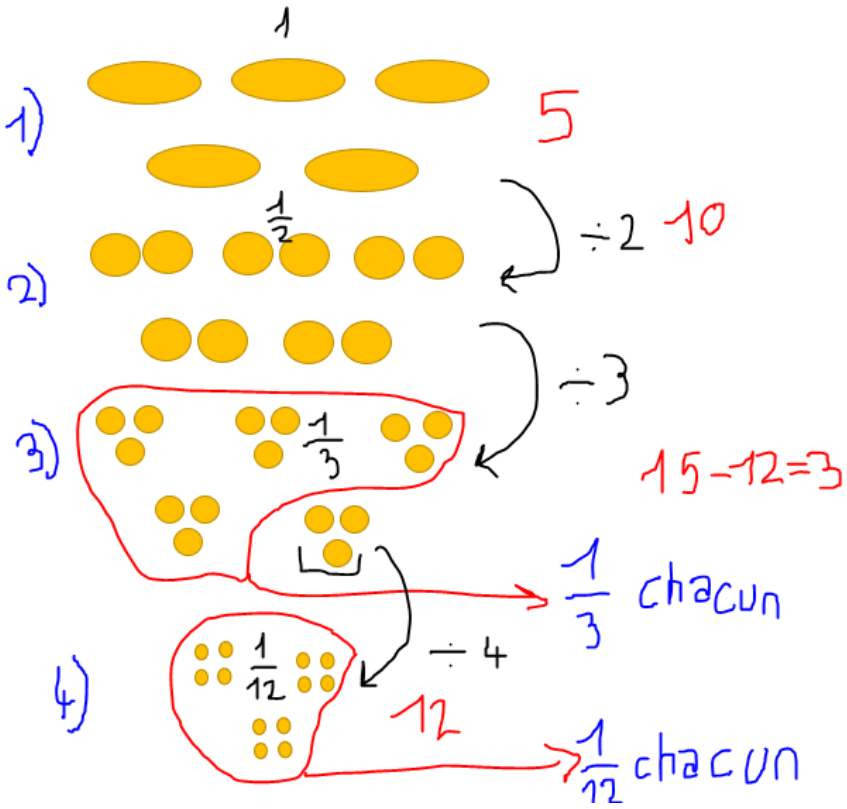
Il y a aussi des résolutions d'équations du 1 er degré : selon le problème 24 : « quelque chose et un septième de cette chose vaut 19 » soit $x + 1/7x = 19$

Le papyrus de Rhind montre des additions mais aussi des multiplications (problèmes 1 à 23 du papyrus) avec notamment la technique de la multiplication par doublement vu précédemment.

Les égyptiens n'utilisent que des **fractions unitaires**, c'est-à-dire avec 1 au numérateur à l'exception de 2/3. Les fractions sont exprimées comme somme de fractions unitaires, dont tous les dénominateurs sont différents, et – le cas échéant- 2/3. Par exemple : $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$ Il existe un algorithme de décomposition.

Comment les égyptiens écrivaient les fractions ? Elles étaient notées par un œil ou un point tel que pour 1/239 on trouve

Quelle est l'origine de ces fractions ?



On désire partager **5 pains** parmi **12 ouvriers**. On ne peut pas partager 5 pains en 12.
Si on partage 5 pains en deux parties égales, on alors 10 portions (ce qui n'est pas passez).
On partage ces portions en 3, ce qui fait 15 portions (on alors 1 tiens de pain) que l'on distribue aux ouvriers. Les 3 restantes sont partagés en quatre chacune (un douzième de pain) pour obtenir 12 nouvelles parts. Chaque ouvrier reçoit alors 1 tiers et un douzième de pain.

c. La division

La **division égyptienne** est une multiplication à trou : **pour diviser un dividende D par un diviseur d, on cherche par combien de fois on doit multiplier d pour atteindre D**. On approche le plus possible par multiples de puissances de 2 puis le reste par fractions de d.

33	1	
66	2	OK
~~132~~	4	
~~264~~	8	
528	16	OK
1056	32	OK

Prenons l'exemple de 1660 par 33. On a donc 1056+528+66=1650=33*(32+16+2)=33*50. Il reste donc 1660-1650=10.

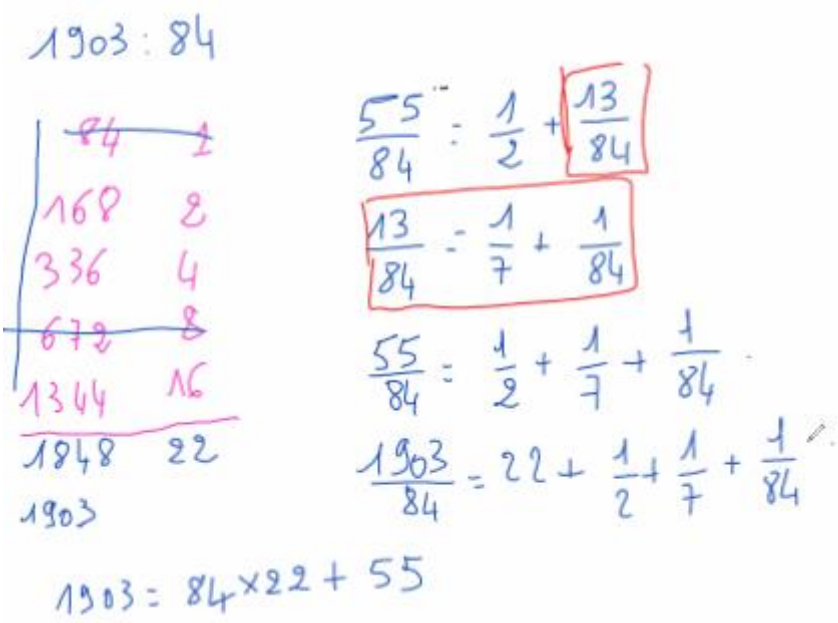
On cherche donc à exprimer 10 comme fraction de 33. La plus grande fraction unitaire de 33 qui rentre dans 10 est ¼ (33/4=8,25<10<33/3=11) et il reste 10 – (33/4)= 1 ¾ tel que 10-8,25=1,75

On cherche ensuite à exprimer 1 ¾ comme fraction de 33. La plus grande fraction unitaire de 33 qui rentre de 1 ¾ est 19 (33/19=1,73…<1,75<33/18=1,88…) et il reste 1 ¾ - (33/19)=1/76. Donc 33* (50+1/4+1/19)= 1659 75/76 (puisqu'il reste 1/76).

On cherche ensuite à exprimer 1/76 comme fraction de 33. La plus grande fraction de 33 qui rentre dans 1/76 est évidemment 1/(33*76)=1/2508.

Le résultat est donc : $50 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2508}$

Un exemple de division qui utilise la notation égyptienne :



Observations

Nous avons vu que malgré des systèmes de numération en apparence compliqués des babyloniens et des égyptiens, ces civilisations ont trouvé des moyens pour faire des calculs comme multiplications et divisions.
Dans ces civilisations, la division ne s'est pas arrêtée à une division euclidienne (avec reste), mais le reste était partagé. Pour la représentation du reste, il faut donc sortir du cadre des nobres naturels.

Babyloniens et égyptiens ont fait des choix différents : les premiers étaient plutôt dans une écriture à virgule (dans notre système nous représentons la partie fractionnaire en base 10, eux, ils la représentent en base 60-ce qui est simplifié par la numération à position relative), alors que les égyptiens choisissent une représentation par les fractions.
Notons que de nos jours, dans l'apprentissage primaire, on introduire d'abord des fractions (partages de segments, d'aires) pour ensuite définir l'écriture décimale en partant de fractions particulières (en base 10).

III. Les romains

Les premières inspirations du peuple romain viennent du peuple des etrusques (peuple de l'Italie du Nord). C'est un peuple venu d'Asie Mineure (selon certaines hypothèses) et qui a prospéré depuis le 7ème siècle av JC. Il subit des invasions gauloises au 4ème siècle av JC et finit par se soumettre entièrement à Rome au 3ème siècle av JC. Exemple d'inspiration dans la numération :

Valeur	1	5	10	50	100
étrusque	I	Λ	X	↑	✳
romain	I	V	X	L (ancien ↓?)	C

a. La numération romaine

La numération romaine utilise des symboles tel que :

Symboles	I	V	X	L	C	D	M
Valeur	1	5	10	50	100	500	1000

Comme vu précedemment, les symboles I, V, X sont antérieurs (même aux alphabets) : ce sont des symboles provenant des étrusques. Notons que la majorité des systèmes de numérations marquent une pause à 4 puis à 9.

Jamais plus de 3 symboles identifiques ne peuvent être juxtaposés (à l'exception du M qui peut apparaître 4 fois et les symboles V,L,D, une seule fois.

Le nombre le plus grand a priori est MMMMDCCCLXXXVIII= 4888. La règle de la numération romaine est standarde : il suffit d'aditionner les valeurs

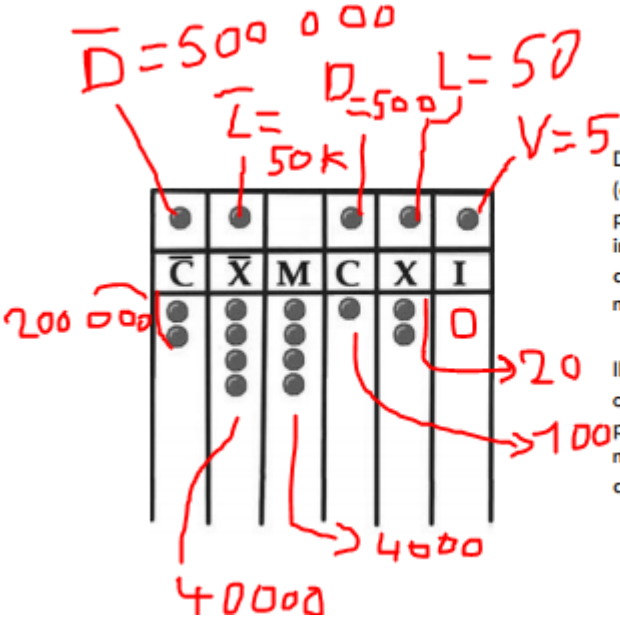
Des exceptions : Un smbole de valeur inférieur placé devant un symbole de valeur supérieur est soustrait (IV= 5-1= 4). Dans le système de base, seules les lettres d'unité peuvent être à gauche d'un symbole plus fort : **I** est une unité pour V et X, **X** est une unité pour L et C, **C** est une unité pour D et M.

Les grands nombres romains : Une barre au-dessus du nombre signifie une multipliciation par 1000 et une double barre signifie une multiplication par 1 000 000

$\overline{XV} = 15000$ et $\overline{\overline{XV}} = 15\,000\,000$

b. Calculs romains

Les romains ne calculaient pas avec leurs chiffres (trop compliqué), mais avec des abaques (du grec « table »), additions et additions réitérées (doubles) :



Dans la version ci-contre (abaque simplifié) on plaçait les unités intermédiaires (V, L, D) au-dessus. On voit donc ici le nombre : 794 675

Il existait des abaques à cire et à poussière qui permettait d'y inscrire le nombre d'unités et d'effacer ensuite.

Tel qu'on a 500 000 + 200 000 + 50 000 + 40 000 + 4000 + 500 + 100 + 50 + 20 + 5 = 700 000 + 90 000 + 400 + 600 + 70 +5 = 794 675

Dans le domaine des mathématiques, l'activité occidentale s'éteint petit à petit après l'activité grecque. La civilisation romaine ne contribue pas vraiment à son développement et se limite à traduire quelques ouvrages grecs, les utilise, et applique les résultats connus des grecs. Les mathématiques indiennes se développent en parallèles et les mathématiques arabes intègrent aussi bien des éléments grecs qu'indiens (tous les ouvrages grecs seront traduits vers l'arabe).

IV. Numération moderne

a. L'invention de la numération moderne

L'invention de notre numération de position s'effectue dans l'Inde du Vème siècle. Nos chiffres de 1 à 9 que nous appelons à tort « chiffres arabes », viennent en réalité des Indes. Leurs « ancêtres » les plus anciens apparaissent dans des inscriptions des grottes de *Nana Ghât* datant du 2ème siècle avant JC. Un des ouvrages indiens mathématiques les plus connus est le traité de cosmologie de 458, le *Lokavibhaga*.

b. Naissance de l'algorisme et son exportation

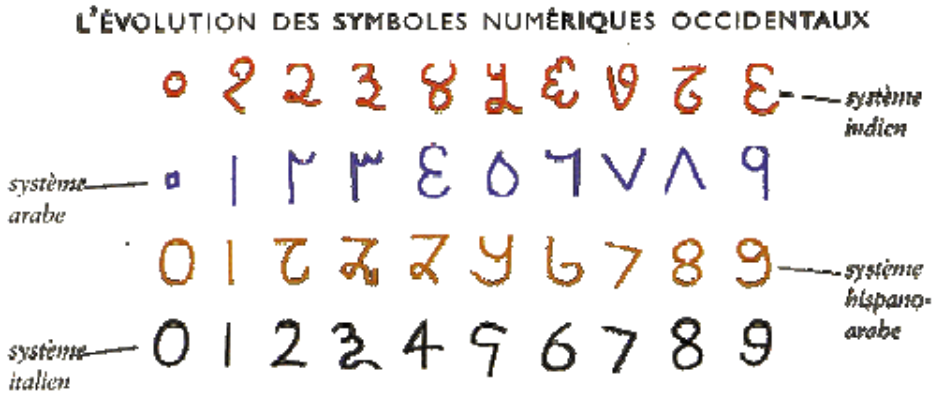
La numération indienne est propagée par les arabes : le premier ouvrage (disparu) en langue arabe présentant ce nouveau savoir fût l'œuvre de Muhammad ibn Mûsa al-Khuwârizmî simplifié en Al Khwarizmi sous le nom de *Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des Indiens*. Il est traduit en latin à partir du XIIème siècle et sa célébrité fût telle que ce mode de calcul fût nommé **algorisme**, d'Algorismus, latinisation du nom de l'auteur.

Al Khwarizmi (783-850) est un mathématicien perse, né dans la région d'Ouzbékistan actuel et est mort à Bagdad. Il est écrit un livre « *Kitab al-jabar wa-l-muqabalah* »- étude systématique des équatons du 1er et 2nd degré, il reprend le travail de Diophante d'Alexandrie. *Al jabar* correspond à « restauration/transposition » par exemple : a-x=b donc a-x +x=x +b donc A=B+X. *Al muqabalah* correspond à « comparaison/réduction » par exemple : a +x=b +x donc a +x-x= b +x-x et a=b.

Son nom donnera lieu au mot « algorithme » et son livre à l' « algèbre ». Il introduit le système positionnel indien dans les mathématiques arabes (à cette époque existait dans le monde arabe la numération *abhad* (alphabet consonantique), qui a des similitudes avec le système alphabétique grecque (notion que dans ce système, les grecs utilisaient un symbole pour chaque chiffre de 1 à 9).

Une lutte entre **abacistes** (ceux qui utilisaient des abaques romains) et **algoristes**, donc Anciens contre Modernes, a eu lieu au cours du Moyen Âge : Les premiers ont souvent été présentés comme les détenteurs des secrets de l'art du calcul et les défenseurs des privilèges de la corporation des calculateurs professionnels, ayant des intérêts communs avec l'Eglise. L'arrivée de la méthode indienne marquait indiscutablement une démocratisation du calcul ; sa simplicité sans mystère rendait son utilisation généralisable.

La graphie des chiffres que nous utilisons ne vient pas du Moyen-Orient arabe mais des arabes occidentaux de l'Espagne Maure. On les appelle **chiffres du ghobar**. Le chemin emprunté fût étonnamment long : inde-Moyen Orient arabe- Afrique du nord-Espagne maure. Le voyage ne dura pas moins de 800 ans. Peu à peu l'origine indienne de ce calcul qui se répandait à travers le monde fut oubliée ; on ne souvint que de ceux desquels on l'avait reçu.



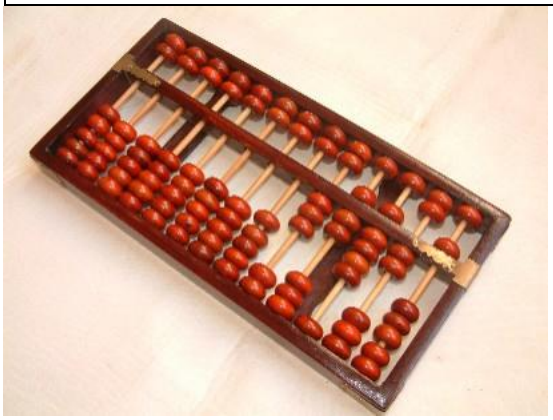
L'enregistrement des nombres à l'aide d'une écriture et l'établissement de dispositifs permettant de calculer étaient depuis toujours séparés. La numération indienne de position (absolue) accomplit le prodige d'abolir la distance entre écriture et calcul. Selon Georges IFRAH :

« Notre numération de position constitue un système parfait. L'invention de notre numération actuelle a bien constitué le stade ultime de l'histoire de la notation numérique : dès lors que celle-ci fût réalisée, aucune autre découverte n'était désormais possible dans ce domaine »

c. Adoption en Europe et Occident du système de numération moderne

Gerbet d'Aurillac est un moine français (938-1003, futur pape Sylvestre II (999) qui aurait été en contact avec les mathématiques arabes à Santa Maria de Ripoll (Catalogne) où il aurait fréquenté des professeurs qui lui enseignaient les méthodes arabes de calcul. Lors de ses enseignements de retour en France il a suscité le goût pour les mathématiques. Mais le clergé a privilégié le système romain auquel aucun autre système ne pouvait être supérieur en théorie.
Adelard de Barth traduit l'ouvrage d'Al Khawarizmi vers 1120 en latin sous el titre *Algorismus* ce qui vaut à la numération d'être nommée notation algorithmique.
Léonard de Pise (Fibonnacci (1175-1250) écrit le *Liber abaci* (1202) (« Libre de calcul »). Il a étudié auprès de savants arabes à Béjaïa, un port en Algérie actuelle. Il introduit les chiffres arabes et le système positionnel et présente quelques algorithmes de calcul (multiplication *per gelosia* par exemple).
Entre le XIIème et XVème siècle, c'est la stabilisation des signes arabes (ou plus exactement indiens) en Europe occidentale.

Cours 5 : Les différents types de calculateur

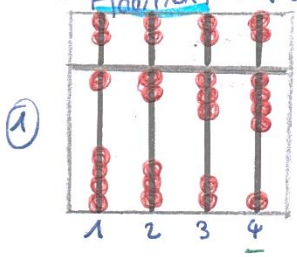


I. Le **boulier chinois** (*suan pan*) date du XIIème-XIIIème siècle. Il est utilisé au XVIème siècle. Il ressemble beaucoup à un boulier romain mais est en réalité dérivé de l'ancien système de calcul chinois avec baguettes. Chaque tige contient 5 boules représentant une unité et des boules représentant cing unités séparées par une barre centrale.

Il permet de calculer des additions, des soustractions, multiplications, divisions, racines carrées et cubiques et des nombres décimaux en attribuant aux colonnes la représentation des décimales.

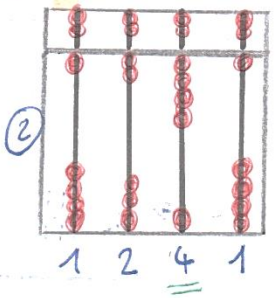
Chaque colonne représente en partant de la droite les unités, dizaines, centaines. Les cinq boules en dessous valent 1 et les deux boules au-dessus valent chacune 5. Pour lire un nombre, on ne prend en compte que les *boules activées* c'est-à-dire déplacées près de la barre centrale horizontale. Sur l'image ci-dessus on peut lire 37 925. On a de gauche à droite : 3 boules de un, 2 boules de un et 1 de cinq (donc 5+2=7), 4 boules de un et 1 de cinq (5+4=9), 2 boules de un et pour finir 1 boule de cinq. On a alors 3,7,9,2 et 5 qu'on lit 37 925.

• Addition : 1234 + 757

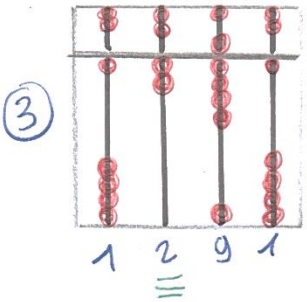


. On pose 1234

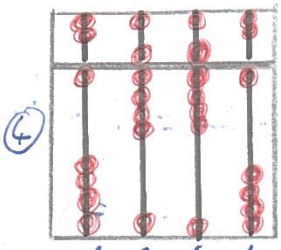
. On ajoute les unités = 4+7 = 11
On ajoute 1 dizaine et on enlève 3 unités.



. On ajoute les dizaines = 4+5 = 9



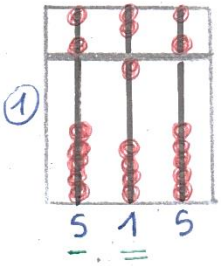
. On ajoute les centaines 2+7=9



. Le résultat est donc 1234 + 757 = 1 9 9 1

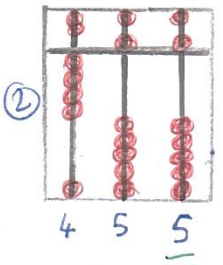
• Soustraction : 515 − 68

. On pose 515

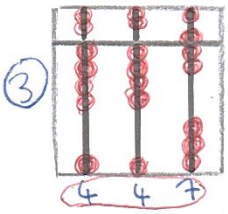


. On commence par soustraire les centaines : 5 − 0 =

. Puis on soustrait les dizaines : 1 − 6 or c'est impossible (chiffre négatif impossible sur le boulier). On retire une centaine pour l'attribuer aux dizaines tel qu'on fait 11 − 6 = 5. Il reste alors (4) centaines.

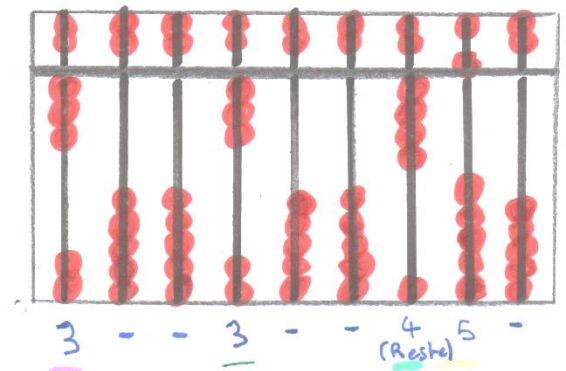


. On soustrait enfin les unités 5 − 8 or c'est impossible. On retire un dizaine pour l'attribuer aux unités tel qu'on fait 15 − 8 = 7. Il reste alors (4) dizaines. On a (7) unités

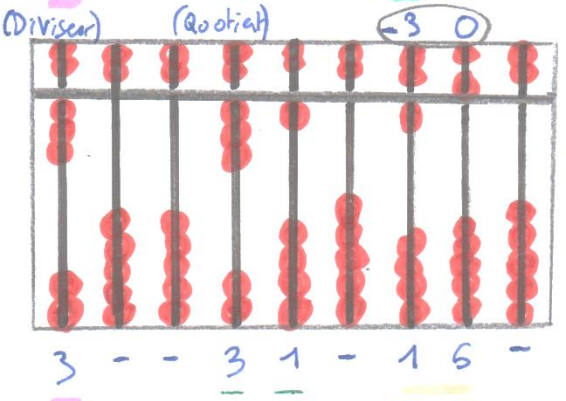


515 − 68 = 447

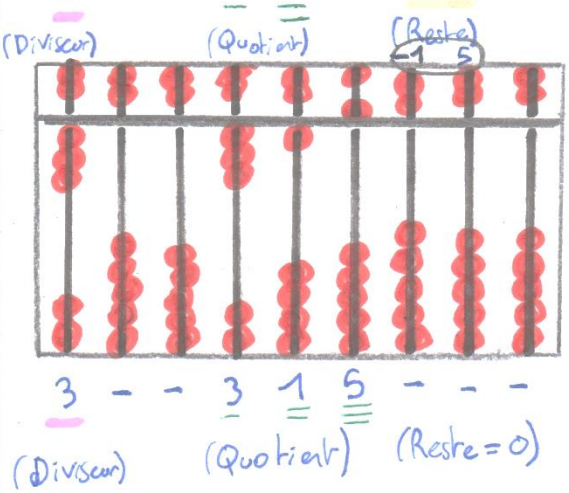
Division : 945 ÷ 3



. On Fait 900 ÷ 3 = 300

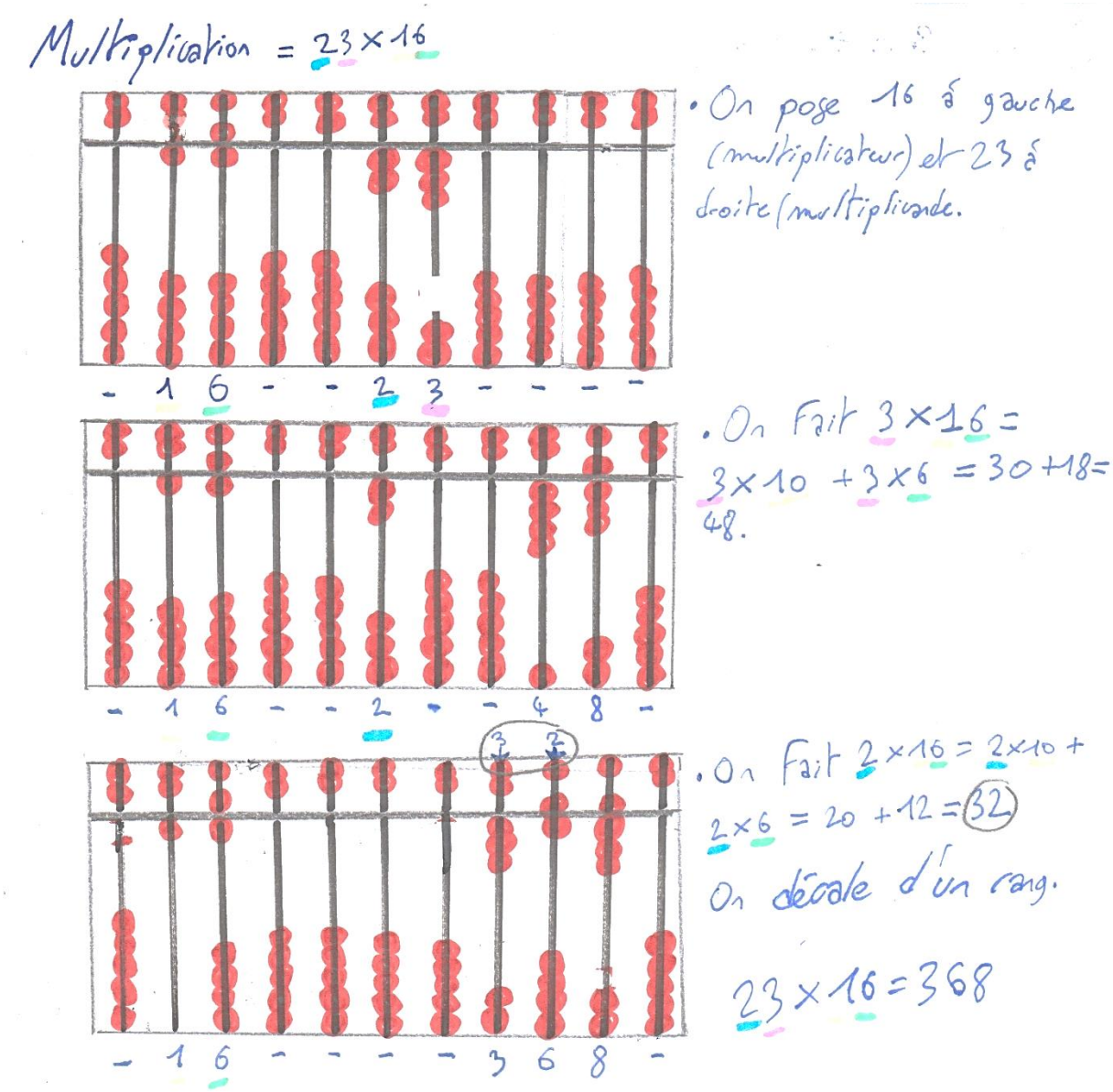


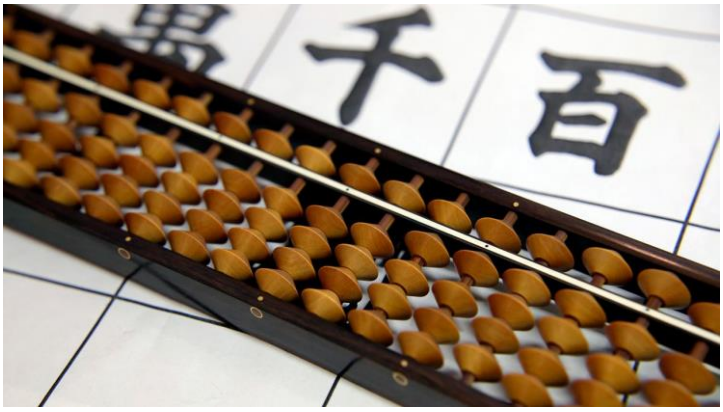
. On Fait 40 ÷ 3 . On enlève 30 il reste 10, 10 ÷ 3 de 40 reste 10 10 est le quotient



. On Fait 15 ÷ 3 = 5 Le troisième chiffre du quotient est 5

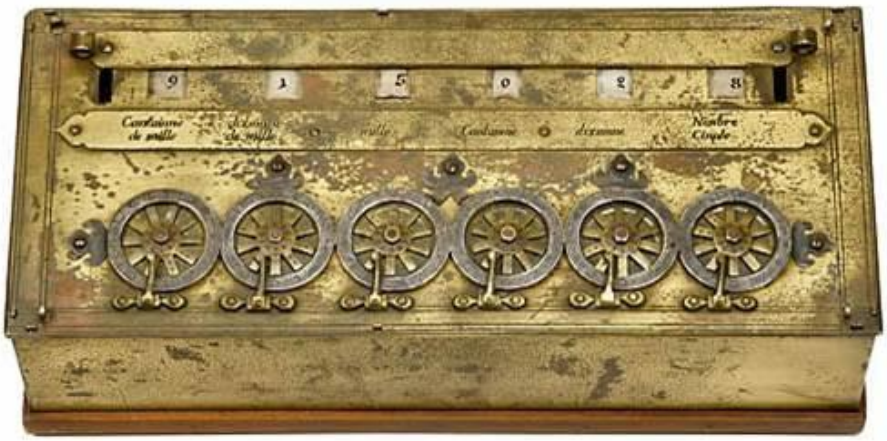
945 ÷ 3 = 315 , reste = 0.





II. Le **boulier japonais**

Aussi appellé *soroban,* il provient de Corée au XVème siècle puis se développe à la fin du 19ème siècle. Il connait des modifications notamment la perte de deux boules (une en haut et en bas par rapport au boulier chinois). Au XIXème siècle, les mots chinois 算盤 (ou 算) qui signifie “calculer” et 盤 qui signifie “plateau/socle”, apparaissent. La prononciation chinoise ressemble à sowanpan (on l’écrit habituellement suanpan). Ce mot s’est transformé en « soroban » au fil du temps. Le boulier japonais est encore utilisé aujourd’hui puisqu’il a été redécouvert dès 1930 et utilisé par des marchands en Chine ou au Japon. Les méthodes sont les mêmes que pour le boulier chinois.



III.**La pascaline**

La pascaline est une calculatrice mécanique qui porte le nom de son inventeur, Blaise Pascal. Après 3 ans de prototypes, il présente sa machine et en construit plusieurs pour la perfectionner et réduire son coût de fabrication. La pascaline est considérée come la première machine à calculer. Pascal est alors encore jeune quand il conçoit cette machine mais il finit par entreprendre un travail philosophique à 31 ans. Son travail dans le monde des sciences n'est pas sans influence dans la suite de son entreprise puisque son ouvrage le plus connu, *Les Pensées*, est empreint d'un esprit mathématique fort (on pensera notamment au pari de Pascal, argument philosophique apologique de la religion chrétienne). La majorité de sa jeunesse est d'ailleurs consacrée aux mathématiques et aux sciences.

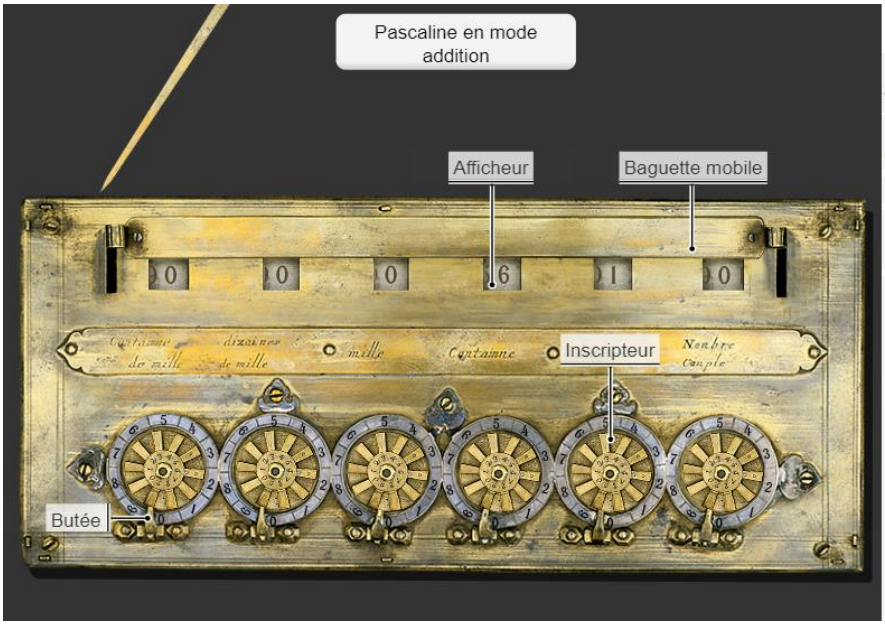
Cette machine, il la conçoit pour son père occupé toute la journée au calcul. Elle est composée d'un système de rouages ressemblant à celui d'une horloge et d'un système de sautoir qui permettait de faire des retenus. On a 6 à 8 roues, voir 10 parfois avec chaque roue qui représente un rang (unité, dizaine, centaine, milliers…etc) avec tous les chiffres inscrits que l'on fait défiler dans le cadran avec des roues d'inscription qui indique la position et la composition de chaque roue. Le système était aussi composé d'un reporteur qui permettait la progression des retenues.

Cependant la pascaline est un échec commercial bien qu'elle fut brevetée et décrite plus tard dans l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert. Son prix de fabrication et de vente est jugé trop élevé. Elle reçoit cependant un succès critique élogieux.

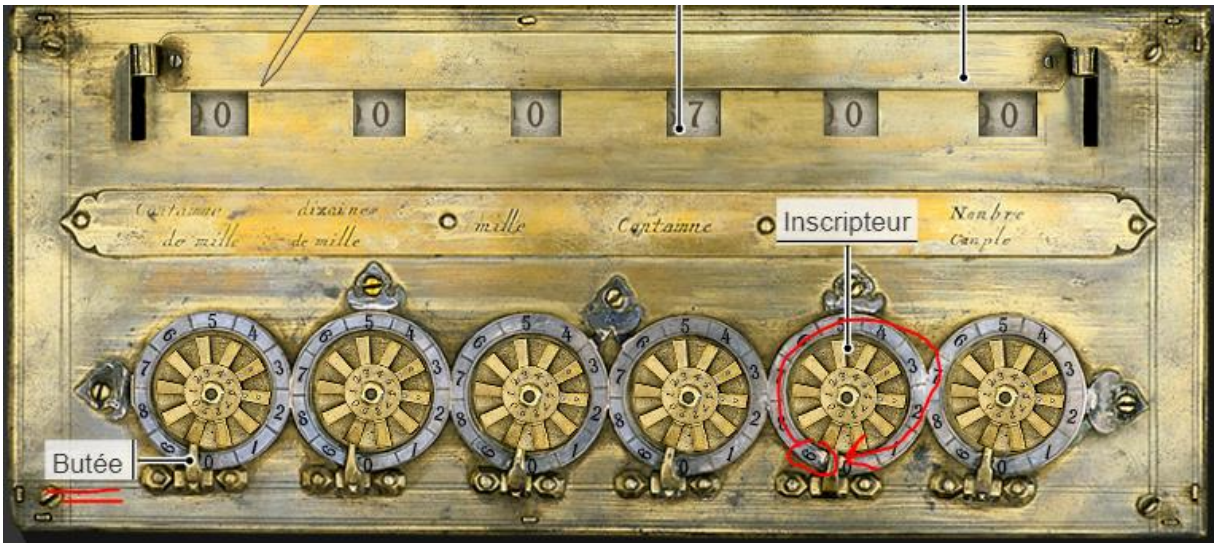
(Vue intérieur de la pascaline et de son système d'engrenage)

➔Comment se servir de la pascaline dans le cadre d'opérations comme l'addition et la soustraction ?

Pour additionner par exemple 610 avec 90, il faut d'abord saisir 610 dans la pascaline (il faut s'assurer qu'elle soit à 0) de gauches à droite :



Il faut ensuite ajouter 90, donc on ajoute 8 dizaines dans l'inscripteur des dizaines, on remarque que le reporteur fait basculer le 6 dans le 7 pour les centaines. On fait tourner l'inscripteur du 9 sur la butée.



Pour une soustraction, on va faire le procédé inverse : on va mettre la pascaline à 999 999 (dans le cas d'une pascaline à 6 affichages). C'est une addition à rebours qui utilise le concept de complément à 9 (on utilise les chiffres qui permettent d'aller à 9. Par exemple, le complément de 641 est 358 (6+3=5+4=8+1=9))

On peut formuler alors pour deux chiffres a et b avec CP le complément d'un chiffre :
CP(a-b)= CP(a) + b.
Pour a=6 et b=3, CP(6-3)=CP(6) + 3 ⇔ CP(3)=3+3 ⇔ CP(3)=6

Prenons l'exemple de 582-126 :

582-126=456

Etape 1 : Complément à 9 de 582=417
Etape 2 : On ajoute 126 à 417= 543
Etape 3 : Complément à 9 de 543 : 456

Mathématiquement : 999-(999-582+126)=456

Sur la machine :

		9	9	9
		0	0	0

← Ligne du résultat

← Ligne de saisie

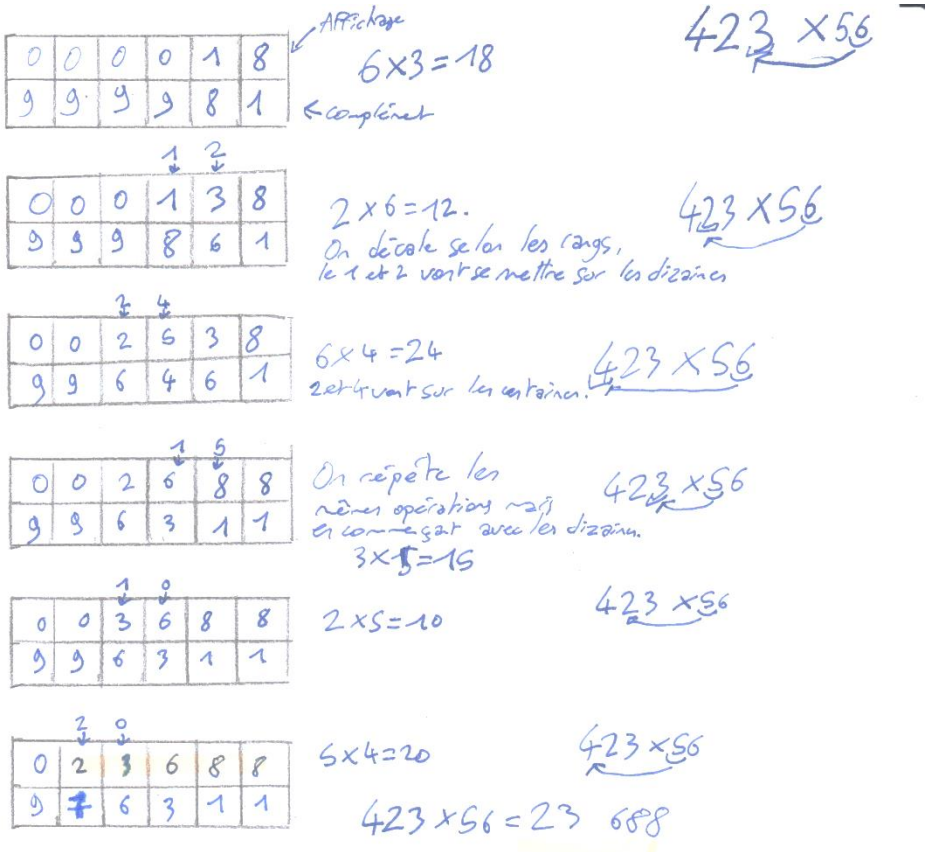
Remettre à 999 la machine

		5	8	2
		4	1	7

Saisir directement le complément à 9 de 582

		4	5	6

Ajouter 126 et on obtient le résultat



➔Et dans le contexte d'une multiplication ou d'une division ?

Dans le cas d'une multiplication, on va faire des multiplications successives et dans le cas des divisions on va déterminer chaque chiffre du quotient par des soustractions successives.

• On va positionner la pascaline en mode soustraction. par souci de clarté, on affichera que les compléments qui nous aideront à faire la division.

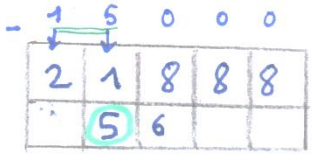
• On va donc entrer 23688 et positionner 56 sur un petit papier avec les mêmes espacements que la pascaline.

23688 ÷ 56

• Tel que:
ligne affichage
ligne quotient (HORS AFFICHAGE)

I] Premier chiffre quotient 5+1

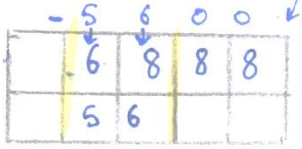
• On regarde combien de fois le premier chiffre du diviseur augmenté d'une unité est contenu dans 23. 6×3=18<23<6×4=24. Premier chiffre quotient est pour l'instant 3.



<=> • 3 × 6 = 18

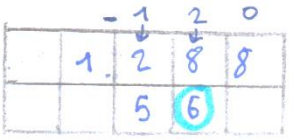
• 3 × 5 = 16

• 68 > 56. On peut rentrer encore 1 fois 56 dans 68. Donc le premier chiffre du quotient est 3+1=4

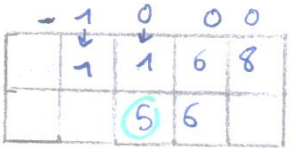


II] Deuxième chiffre quotient

• On repète la première étape. Dans 12, 6 peut rentrer 2 fois. Le deuxième chiffre du quotient est pour l'instant 2 (2×6=12).

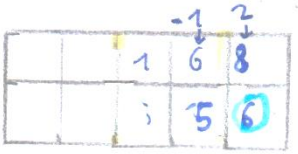


• 2 × 6 = 12



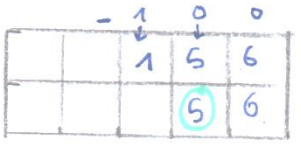
• 2 × 5 = 10. 56 se retrouve ensuite pour cette étape en face de 16. 16<56 Donc 2 est bien le deuxième chiffre du quotient

III] Troisième chiffre du quotient.



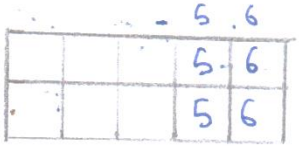
6 rentre 2 fois dans 16 (6×2=12<16<6×3=18). 2 est 3ème chiffre du quotient pour l'instant.

• 2 × 6 = 12



• 2 × 5 = 10

• 56 = 56 donc rentre encore une fois. Le 3ème chiffre du quotient est donc 2+1=3



Quotient = 423. $\frac{23688}{56} = 423$

IV. Le **bâton de Napier**

Le **bâton de Napier** fut inventé par John Napier, astronome et mathématicien écossais. Ce procédé du bâton de Napier voit le jour en **1617**, dans ses recueils *Deux livres sur la rhabdologie et sur la numération avec virgules*. Il y présente un abaque (maintenant appelé bâton ou réglette de Napier) qui facilite le calcul des produits, quotients, puissances et racines.

Cet abaque est composé d'un plateau à rebord sur lequel peuvent être placées des réglettes gravées. Le bord gauche du tableau est gravé et divisé en 9 cases, numérotées de 1 à 9. Chaque réglette représente une des tables de multiplications (allant de 0 à 9), elles sont elles aussi gravées avec chaque cases représentant le résultat de la multiplication. Chaque case est divisée d'un trait diagonal avec à gauche, le chiffre des dizaines et à droite, le chiffre des unités.

De plus, ce procédé s'inspire de la méthode **Per Gelosia**, John Napier décrit même son abaque comme une amélioration de cette méthode.

« Fun fact » : au départ, cet abaque portait le nom de Napier's bones, puisqu'il était originellement en os.

Méthode / Principe :

3 étapes principales :

- **Étape 1** : elle consiste a placé les réglettes qui correspondent à la multiplication, dans notre cas, les réglettes 3 & 4.
- **Étape 2** : après avoir placé les réglettes, on sélectionne les multiplications qui nous intéresse dans notre cas : 2, 5 et 6. Ensuite, on additionne le résultat de chaque multiplication (ex : 170)
- **Étape 3** : après avoir récupéré le résultat de chaque multiplications, on va enfin pouvoir les additionner. Pour ce faire, quand on pose l'addition, on commence avec le résultat de 6 ; et ainsi de suite vers le « haut ». Cependant, pour chaque résultat, on va le déplacer d'une colonne vers la gauche, pour avoir le chiffre des unités, des dizaines, des centaines, des milliers, etc.

256 X 34

Étape n°1 & 2:

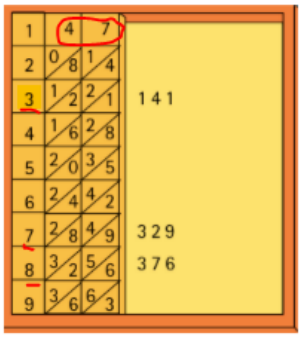
1	3	4	
2	0/6	0/8	68
3	0/9	1/2	
4	1/2	1/6	
5	1/5	2/0	170 = 1+ (5+2) + 0
6	1/8	2/4	204
7	2/1	2/8	
8	2/4	3/2	
9	2/7	3/6	

Étape n°3 :

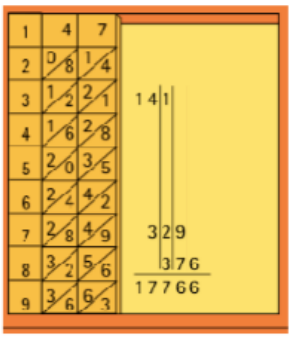
+1			
6	8		
1	7	0	
	2	0	4
8	**7**	**0**	**4**

378 x 47

Étape n°1 & 2

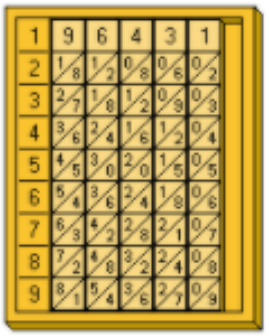


Étape n°3



Application à la division [modifier | modifier le code]

Le fait de disposer d'un algorithme de calcul des produits facilite également la division. On suit la disposition de l'algorithme traditionnel de calcul de la division. Parallèlement, on forme sur la première ligne du plateau la suite des chiffres du diviseur, ce qui permet de lire très rapidement le produit du diviseur par les chiffres de 1 à 9. Il suffit de choisir parmi eux celui qui est immédiatement inférieur au dividende. On calcule alors le reste par soustraction, et on poursuit l'algorithme.

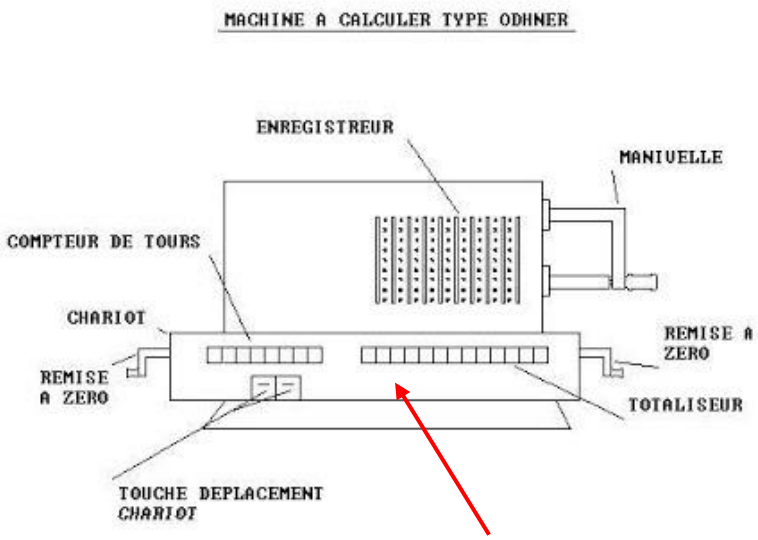


96431
192862
289293
385724
482155
578586
675017
771448
867879

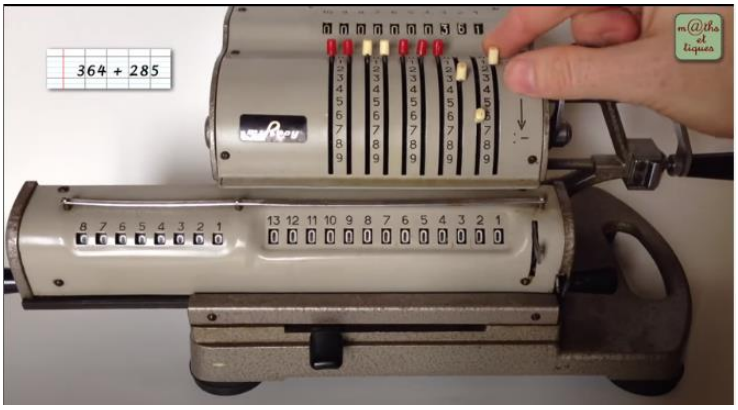
46785399 | 96431
385724 485
8212999
771448
498519
482155
16364

Bien entendu, cette technique s'applique aussi bien pour déterminer le résultat d'une division entière avec reste, que d'une division à virgule.

V. L'arithmomètre d'Odhner



L'**arithmomètre d'Odhner** porte le nom de Willgodt Theophil Odhner un ingénieur et entrepreneur. Cette invention provient de Russie et est une amélioration de l'arithmomètre qui fait son apparition en 1820 grâce à Charles XAviers Thomas de Colmar. L'arithmomètre sera un succès critique et commercial mais sa fabrication et diffusion est interrompue par la révolution russe.



C'est une machine à calculer à addition et soustraction directes et qui permet de multiplier et de diviser rapidement. Elle est composée **d'une platine de résultat mobile** (le cylindre en bas désigné par **la flèche rouge**) et d'un mécanisme à engrenage. Il est surtout utilité par des douaniers ou des comptables. Sur l'enregistreur se trouve des leviers à abaisser pour inscrire les chiffres (ci contre en blanc et rouge). A côté du totaliseur se trouve le total des facteurs (compteur de tours) avec en noir les positifs et en rouge les négatifs.

Dans le cadre d'une **multiplication**, on va effectuer des additions successives. Par exemple, comment calculer 256x34 ?

- Faire coulisser les leviers jusqu'aux bon crans pour obtenir le chiffre à multiplier dans sur le cylindre du haut (256)
- Tourner la grande manivelle vers soi autant de fois qu'il y a d'unités (4) => **Cela permet d'inscrire 256 quatre fois dans le cylindre mobile totaliseur en bas.**
- Un résultat intermédiaire s'affiche (4*256 = 1024), il sera additionné aux résultats intermédiaires qui suivront.
- Décaler le cylindre du bas d'un cran vers la droite pour signifier que l'on effectue un nouveau calcul => **On décale d'un rang pour calculer avec comme base les dizaines** comme on le ferait pour notre technique de multiplication.
- Tourner la grande manivelle vers soi autant de fois qu'il y a de dizaines (3)
- Le résultat est lisible à la droite du cylindre du bas. Sur la gauche, on voit le chiffre par lequel on a multiplié 256, soit 34.

Pour calculer 256 x 34 l'arithmomètre d'Odhner additionne plusieurs résultats de multiplications intermédiaires (d'abord les unités puis les dizaines puis les centaines, et ainsi de suite…). La méthode de calcul de cette machine se rapporte donc à notre propre méthode de multiplication.
Le calcul à effectuer : 256x4 = 1024
256x30 = 7680

Donc la machine effectue automatiquement 7680+ 1024 = 8704.

Dans le cadre d'une **addition,** on va saisir le premier chiffre, l'enregistrer dans le cylindre du bas puis saisir le deuxième et l'enregistrer dans le totaliseur. On tourne la manivelle dans le sens **horaire**.
Dans le cadre d'une soustraction, on fait le même procédé mais en tournant la manivelle dans le sens **antihoraire**. Pour éviter les tours de manivelle successifs, on peut employer la **distributivité** : Pour calculer 263x99, on fait 263*100 (donc un tour de manivelle en décalant) – 263*1. On passe de 18 tours de manivelle à seulement 2 (un tour pour la multiplication et un tour pour la soustraction.

Dans le cadre d'une **division,** on utilise la division euclidienne avec soustractions successives :
exemple avec 9983 :56

- Faire coulisser les leviers jusqu'aux bon crans pour obtenir le chiffre à diviser dans sur le cylindre du haut (9983) et tourner la grande manivelle dans le sens horaire pour enregistrer dans le cylindre du bas le chiffre à diviser. On efface le nombre de tours inscrits car le compteur de tour va servir pour le quotient.
- On commence par les **centaines** Il y a 99 centaines et on décale le rang le cylindre vers la gauche de **deux crans**. On fait coulisser les leviers jusqu'à 56 et on va donc chercher à savoir combien on peut faire entrer 56 dans 99. Comme j'enlève 56 à 99, on fait une **soustraction** donc on tourne la manivelle dans le sens **antihoraire.** 99-56=43, il reste donc 43 centaines. Il est affiché en bas 4383. **Le premier chiffre du quotient est 1.**
- On décale le cylindre du bas vers la **droite** pour s'occuper des **dizaines**. On a alors 438 dizaines. On fait le même procédé que précédemment, on tourne la roue autant de fois qu'il y a de 56 dans 438, dans le sens antihoraire. La manivelle est tournée **7** fois, il reste 46 dizaines. Il est affiché en bas 463. **Le deuxième chiffre du quotient est 7.**
- On décale un dernière fois le cylindre du bas **vers la gauche** pour s'occuper des unités. On a alors 463 unités. On tourne la manivelle pour enlever 56 jusqu'à tomber jusqu'au reste. On tourne la manivelle **8** fois et il reste 15 unités. **Le troisième chiffre du quotient est 8.**
- Le **quotient** de la division est **178** avec un **reste** de **15.**

Cours 6 : L'arithmétique

I. Définitions

Division euclidienne

Dans $\mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels, la **division euclidienne** est une fonction qui, à tout couple **(D,d)** d'entiers naturels avec **d non nul**, associe les entiers naturels **q et r** tels que :

$$D = d \times q + r \text{ avec } 0 \leq r < d$$

D est le **dividende**, d le **diviseur,** q le **quotient** et r **le reste.**

Exemple : La division 30 : 3=10 est une fonction qui associe le couple (D=30, d=3) avec les entiers naturels **q=10** et **r=0**. On vérifie l'équation ci-dessus en remplaçant les lettres par les chiffres tel que 30= 3*10+0

Division dans l'ensemble des rationnels Q

La **division** est la fonction qui à tout couple (a,b) et b non nul, associe la solution de l'équation :

$$a = b * x$$

Exemple : La division 15 : 3 est une fonction qui associe le couple (a=15,b=3) avec la solution de l'équation 15=3 * x. On résout l'équation : $x=\frac{15}{3} \Leftrightarrow x=5$

II. Multiples et diviseurs de naturels

Multiple et diviseur

Soient **a et b** deux entiers naturels. a est un **diviseur** de b s'il existe **k entier tel que** b= a x k
On dit alors que **b** est un **multiple de a** ou encore que **b** est **divisible par a**.

Exemple : Soit a= 3 et b=15. a est un diviseur de b tel que 15= 3 * 5. L'entier k=5 permet de dire que a est un diviseur de b ou autrement dit, 15 est divisible par 3. On dit aussi que 15 est un multiple de 3.

Si le naturel est un diviseur de a et de b, c'est aussi un diviseur de a+b.

Exemple : Soit a=10 et b=20. a est un diviseur de b tel que k=2 et tel que 20=10*2.
2 est un diviseur de a=10 tel que k=5 tel que 10=2*5. 2 est un diviseur de b=20 tel que k=10 tel que 20=2*10. Alors selon la propriété énoncée, 2 est un diviseur de a+b c'est-à-dire de 10+20=30.
2 est un diviseur de 30 tel que k=15 et tel que 30=2*15.

Un entier est divisible par :

- **2** s'il est **pair**
- **3** si la somme des chiffres est **divisible par 3**
- **5** si son chiffre des unités est **0 ou 5**
- **9** si la somme des chiffres est **divisible par 9**
- **10** si son chiffre des unités est **0**.

Nombre premier

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Un entier naturel est dit **nombre premier** (sur le tableau en rouge) s'il a **exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.**

C'est-à-dire que cet entier ne peut pas être autre chose que multiple de 1 et lui-même.

Si on prend **5, qui est un nombre premier,** on fait 5/1=1 et 5/5=1.
Si on fait 5/2= 2,5, on n'obtient pas un entier naturel.

Si on prend **64, qui n'est pas un nombre premier**, on fait 64/1=1 et 64/64=1.
Mais 64/2=32. Donc 64 a plus que les deux diviseurs énoncés. Donc 64 n'est pas un nombre premier.

Méthodes pour obtenir les facteurs premiers d'un entier :

Les facteurs premiers d'un entier sont les facteurs irréductibles d'un entier.
1ère méthode : On décompose successivement l'entier par des multiplications.
Exemple : 120= 2*60 ⇔120= 2*2*30 ⇔120= 2*2*2*15 ⇔ 120= 2*2*2*3*5 ⇔120=2^3*3*5

2ème méthode : On divise le nombre par tous les nombres premiers en commençant par le plus petit qui est 2. Si on ne peut pas diviser par 2 sans obtenir un entier, on passe au suivant, et ainsi de suite…jusqu'à arriver à 1.

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Arrivé à 15, on ne peut diviser par 2 sans obtenir un entier. On passe alors à 3, le prochain nombre premier. Arrivé à 5, on ne peut diviser par 3 sans obtenir un entier. On passe alors à 5, le prochain nombre entier. On tombe alors sur 1. Les facteurs premiers sont ceux alors inscrits à gauche du tableau.

Alors on a 120= 2*2*2*3*5 = 2^3*3*5

III. Plus grand diviseur commun (PGDC)

Le PGCD

Si a et b désignent deux nombres entiers naturels non nuls, on note PGCD (a ; b), le plus grand des diviseurs positifs communs à a et b.

4 méthodes que l'on va expliquer avec le PGCD (60 ; 48)

1	60
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10

1	48
2	24
3	16
4	12
6	8

1ère méthode : On dresse la liste des diviseurs de chacun des deux nombres. Le PGCD est alors le plus grand des diviseurs communs aux deux nombres. Ici avec l'exemple ci contre, le plus grand diviseur commun à 60 et 48 est 12. On a alors PGCD (60 ;48)=12

2ème méthode : On décompose les deux nombres en **produits de facteurs premiers.** Le PGCD est alors obtenu en effectuant le produit des facteurs premiers figurant dans les deux décompositions affectées de la puissance la plus basse avec laquelle il figure dans l'une des décompositions. Autrement dit on fait le produit du (ou des) facteur(s) commun(s) avec la(les) puissance(s) la(les) plus basse(s) avec le facteur commun aux deux décompositions.

60 = 6 *10 ⇔60= 2*3*2*5 ⇔ 60= 2^2*3*5

48= 2*24 ⇔ 48= 2* 2* 12 ⇔ 48= 2*2*2*6 ⇔48= 2*2*2*2*3 ⇔48= 2^4*3

On va faire le produit avec 2^2 car 2 est un facteur premier commun et $2^2<2^4$, et avec 3 car un facteur premier commun.
On calcule 2^2*3=4*3=**12**.

Alors on a PGCD(60 ;48)=**12**.

3ème méthode : On utilise l'**algorithme d'Euclide**. On effectue la division euclidienne de a par b puis de b par le reste puis ce reste par le second…etc jusqu'à obtenir un reste nul. Le PGCD de a et b entiers est alors le dernier reste non nul.

60 : 48, on peut faire rentrer une fois 48 dans 60 et il reste 12 (60-48=12). On fait 48 :12, on peut faire rentrer 4 fois 12 et le reste est nul (48-4*12=0). Le PGCD de 60 et 48 est alors 12, soit le dernier reste entier non nul.

4ème méthode : On utilise des **soustractions successives**. On soustrait le plus petit des deux nombres au plus grand et on prends les deux plus petits et on recommence. On continue jusqu'à obtenir un résultat nul. Le PGCD est le dernier résultat non nul.

60-48=12
48-12=36
36-12=24
24-12=12 ➔ Le PGCD de (60 ;48) est 12 soit le dernier résultat non nul.
12-12=0.

IV. Nombres premiers entre eux

Deux nombres entiers dont le PGCD est 1 sont dits premiers entre eux.

Exemple : Le PGCD de 79 et 17 est 1, ce sont des nombres premiers entre eux. Quand on prends la seconde méthode, on s'aperçoit qu'on ne peut pas diviser 79 par 2, le plus petit des nombres premiers. Son diviseur le plus grand est 79 et son autre unique diviseur est 1.
On ne peux pas non plus diviser 17 par 2, le plus petit des nombres premiers. Son diviseur le plus grand est 17 et son autre unique diviseur est 1.
Leur plus grand diviseur commun est 1 donc PGCD(79 ;17)=1.

Soit c un entier naturel, soit a et b sont deux nombres premiers entre eux. Si « c » est un multiple de a et « c » est un multiple de b, alors « c » est un multiple de a*b.

Exemple : 1 est un multiple de 79 et 1 est un multiple de 17 donc 1 est un multiple de 79*17=1343

V. Plus petit multiple commun (PCM)

Le PPCM de deux nombres entiers naturels non nuls est leur plus petit multiple commun non nul. On note PPCM (a,b), le PPCM des nombres a et b. 3 méthodes dont les deux premières sont semblables aux deux premières pour le PGCD. On utilisera pour l'exemple PPCM(60 ;48)
La **méthode 1** utilise les **multiples communs** et non pas les diviseurs communs.

1	60	48
2	120	96
3	180	144
4	240	192
5	300	240
6	360	288

Exemple :
On voit ici que le plus petit multiple commun de 60 et 48 est 240 (en vert). On a alors PPCM(60 ;48)=240)

La **méthode 2** utilise les décompositions en produits de facteurs premiers mais en prenant tout les facteurs premiers figurant dans l'un au moins de ces produits affectés du plus grand exposant. On va donc prendre le facteur commun ayant l'exposant le plus fort, tout les facteurs communs et le plus grand facteur appartenant à une des deux décompositions.

Exemple :

660 = 6 *10 ⇔60= 2*3*2*5 ⇔ $60= 2^2*3*5$

48= 2*24 ⇔ 48= 2* 2* 12 ⇔ 48= 2*2*2*6 ⇔48= 2*2*2*2*3 ⇔$48= 2^4*3$

On prends alors $2^4*3*5=240$. PPCM(60 ;48)=240.

La **méthode 3** utilise la formule : PGCD(a ;b)*PPCM(a ;b)=a*b

Exemple : On va d'abord trouver le PGCD du couple (60 ;48). On utilise la méthode 4 du PGCD.
60-48=12
48-12=36
36-12=24
24-12=12 ➔ Le PGCD de (60 ;48) est 12 soit le dernier résultat non nul.
12-12=0.

Donc PGCD(60 ;48)=12.
Selon la formule, PGCD(a ;b)*PPCM(a ;b)=a*b ⇔ 12* PPCM(a ;b)=60*48 ⇔12* PPCM(a ;b)=2880 ⇔ PPCM(a ;b)=2880/12 ⇔ PPCM(a ;b)=240.